BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

CENTRES ÉTRANGERS 1
2024

$$f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$$

CORRECTION

1. a. Déterminons la limite de la fonction f en " 1 ":

Ici: • $f(x) = \dfrac{e^x}{x - 1}$ $\left(\dfrac{e^u}{v}\right)$

• $\mathcal{D}f =]-\infty\,; 1[$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x - 1}.$$

Or: • $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} e^x = e$

• $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} x - 1 = 0^-$.

Dans ces conditions: $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{e}{0^-} = -\infty$.

1. b. Déduisons-en une interprétation graphique:

f admet donc une asymptote verticale d'équation: $x = 1$.

2. Déterminons la limite de f en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x - 1}.$$

Or: • $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

• $\lim_{x \to -\infty} x - 1 = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$

Dans ces conditions: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0}{-\infty} = 0.$

Notons que comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, la courbe représentative de f admet

une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation: $y = 0$.

3. a. Calculons la dérivée f' de f sur $]-\infty ; 1[$:

La fonction f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]-\infty ; 1[$.

Pour tout $x \in]-\infty ; 1[$: $f'(x) = \frac{(1 \times e^x) \times (x - 1) - (e^x) \times (1)}{(x - 1)^2}$

$$\left(\frac{(U' \times e^U) \times V - U \times V'}{V^2} \right)$$

$$= \frac{e^x (x - 1 - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{(x - 2)\, e^x}{(x - 1)^2}.$$

D'où pour tout $x \in]-\infty ; 1[$: $f'(x) = \dfrac{(x-2)\,e^x}{(x-1)^2}$.

3. b. Dressons le tableau de variations de f sur $]-\infty ; 1[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]-\infty ; 1[$ est :

x	$-\infty$			1
f'		$-$		||
f	0	$\searrow$	$-\infty$	||

En effet pour tout $x \in]-\infty ; 1[$, $f'(x) = \dfrac{(x-2)\,e^x}{(x-1)^2} < 0$ et par conséquent sur cet intervalle : **f est strictement décroissante.**

4. a. Étudions la convexité de f sur $]-\infty ; 1[$:

D'après le cours :
- f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$
- f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Or ici pour tout $x \in]-\infty ; 1[$: $f''(x) = \dfrac{(x^2 - 4x + 5)\,e^x}{(x-1)^3}$.

Étudions le signe de f'' sur $]-\infty ; 1[$.

Sur $]-\infty ; 1[$: $\dfrac{e^x}{(x-1)^3} < 0$ car $(x-1)^3 < 0$.

Donc le signe de f'' dépend du signe de $x^2 - 4x + 5$.

Soit l'équation: $x^2 - 4x + 5 = 0$. ($ax^2 + bx + c = 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac = -4 < 0$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution dans IR.

Dans ce cas, sur $]-\infty\,;\,1[$: $x^2 - 4x + 5 > 0$ (signe de a).

D'où pour tout $x \in]-\infty\,;\,1[$: $f''(x) < 0$.

Comme $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;\,1[$: f est strictement concave sur $]-\infty\,;\,1[$.

4. b. Déterminons l'équation réduite de la tangente T:

Il s'agit ici de déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A (0 ; $f(0)$) cad A (0 ; -1).

L'équation réduite de la tangente T demandée s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

$$\text{cad} \quad y = f'(0) \times (x - 0) + (-1).$$

Or ici: $f'(0) = \dfrac{(0-2)\,e^0}{(0-1)^2} = -2$.

Dans ces conditions: $y = -2 \times (x - 0) - 1$

$$\text{cad} \quad y = -2x - 1.$$

L'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A est donc: $y = -2x - 1$.

4. c. Déduisons-en que pour tout $x \in]-\infty ; 1[$, $e^x \geqslant (-2x - 1) \times (x - 1)$:

Comme f est strictement concave sur $]-\infty ; 1[$: $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes.

Donc, en particulier, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de la tangente T d'équation:

$$y = -2x - 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty ; 1[$, nous pouvons écrire:

$$f(x) \geqslant -2x - 1 \iff \frac{e^x}{x - 1} \geqslant -2x - 1$$

$$\iff e^x \geqslant (-2x - 1) \times (x - 1).$$

D'où pour tout $x \in]-\infty ; 1[$, nous avons bien: $e^x \geqslant (-2x - 1) \times (x - 1)$.

5. a. Montrons que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $]-\infty ; 1[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $]-\infty ; 1[$,

• " $k = -2$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

et: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$

• f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = -2$ ($k = -2$) admet bien une unique solution α appartenant à $]-\infty; 1[$.

5. b. Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}:

A l'aide d'une calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près est:

$$0,31 < \alpha < 0,32.$$