www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

CENTRES ÉTRANGERS 1

2024

$y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$

CORRECTION

1. Montrons que l'unique solution constante solution est la fonction nulle:

Soit $f(x) = k$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ solution de (E_0).

L'équation différentielle (E_0) est: $y' = y$.

Dans ces conditions avec $f(x) = k$: $y' = y \iff 0 = k$

cad $k = 0$.

L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est donc bien: la fonction nulle cad $f(x) = 0$.

2. Déterminons toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0):

Ici, l'équation différentielle s'écrit: $y' = y \qquad (E_0)$.

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$)

sont les fonctions de la forme: $x \rightarrow C.e^{ax} + \dfrac{-b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont donc de la forme:

$$h_1(x) = C.e^{1 \times x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Montrons que h est solution de l'équation différentielle (E):

L'équation différentielle (E) s'écrit: $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$.

h est solution de (E) ssi: $h' = h - \cos(x) - 3\sin(x)$

cad $h' - h = -\cos(x) - 3\sin(x)$.

Or pour tout $x \in IR$: • $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$

• $h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$.

Dans ces conditions: $h' - h = -2\sin(x) + \cos(x) - [2\cos(x) + \sin(x)]$

$= -2\sin(x) + \cos(x) - 2\cos(x) - \sin(x)$

$= -\cos(x) - 3\sin(x)$.

h est donc bien solution de l'équation différentielle (E).

4. Montrons que " f solution de (E) " <=> " f - h solution de (E_0) ":

• f est solution de (E), d'où: $f' - f = -\cos(x) - 3\sin(x)$.

• f - h est solution de (E_0), d'où: $(f - h)' = (f - h)$

$\iff f' - h' = f - h$

$\iff f' - f = -h + h'$

$\iff f' - f = -\cos(x) - 3\sin(x)$.

D'où pour tout $x \in IR$, nous avons bien: " f solution de (E) " <=> " f - h solution de (E_0) ".

5. Déduisons-en toutes les solutions de (E):

D'après la question précédente et la question **2.**, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - h(x) = C \cdot e^{1 \times x}$$

$$= C \cdot e^{x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, toutes les solutions de (E) sont donc les fonctions:

$$f(x) = C \cdot e^{x} + h(x) \quad \text{cad} \quad f(x) = C \cdot e^{x} + 2\cos(x) + \sin(x),\ C \in \mathbb{R}.$$

6. Déterminons l'unique solution " g " de (E) telle que $g(0) = 0$:

Nous avons: $g(0) = 0 \iff C \cdot e^{0} + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$

$\iff C + 2 = 0$

cad $C = -2$.

Ainsi, l'unique solution " g " est: $g(x) = -2e^{x} + 2\cos(x) + \sin(x)$.

7. Calculons l'intégrale I:

L'intégrale à calculer I est: $I = \int_{0}^{\pi/2} (-2e^{x} + \sin(x) + 2\cos(x))\,dx$.

D'où: $I = [-2e^{x} - \cos(x) + 2\sin(x)]_{0}^{\pi/2}$

$= (-2e^{\pi/2} + 2) - (-2 - 1)$

$= 5 - 2e^{\pi/2}$.

Au total: $I = 5 - 2e^{\pi/2}$.