BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

CENTRES ÉTRANGERS 1

2024

$f(x) = 2x\,e^{-x}$

CORRECTION

1. a. Résolvons $f(x) = x$ sur $[0 ; 1]$:

Ici: • $f(x) = 2x\,e^{-x}$ $\quad (U \times e^{V})$

• $\mathcal{D}f = [0 ; 1]$

$f(x) = x \iff 2x\,e^{-x} = x$

$\iff x \times (2e^{-x} - 1) = 0$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 2e^{-x} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ e^{-x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ -x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \ln(2) \end{cases} \quad \left(\text{car : } \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)\right).$$

Au total, l'équation $f(x) = x$ admet 2 solutions sur $[0; 1]$:

$$x = 0 \text{ et } x = \ln(2).$$

1. b. Montrons que sur $[0; 1]$, $f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$:

La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 1]$.

Pour tout $x \in [0; 1]$: $f'(x) = (2) \times (e^{-x}) + (2x) \times (-e^{-x})$

$$(U' \times e^V + U \times V' \times e^V)$$

$$= 2(1 - x) \cdot e^{-x}.$$

D'où pour tout $x \in [0; 1]$: $f'(x) = 2(1 - x) \cdot e^{-x}$.

1. c. Donnons le tableau de variations de f sur $[0; 1]$:

• Étudions le signe de f' sur $[0; 1]$:

Pour tout $x \in [0; 1]$: • $2(1 - x) \geq 0$

• $e^{-x} > 0$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in [0; 1]$: $f'(x) \geq 0$.

Ainsi: f est croissante sur $[0; 1]$.

• **Dressons le tableau de variations de f sur $[0; 1]$:**

Le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 1]$ est:

x	0	1
f'	+	
f	a ↗	b

Avec: • $a = f(0) = 0$

• $b = f(1) = \dfrac{2}{e}$.

2. a. **Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$:**

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$

• $U_0 = 0{,}1$

• $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ ".

Initialisation: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$?

$$\begin{cases} U_0 = 0,1 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 = 2\,U_0\,e^{-U_0} \quad \text{cad} \quad U_1 = 0,2 \times e^{-0,1} \approx 0,18. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ et montrons qu'alors $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1$.

Supposons: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: f est croissante sur $[\,0\,;\,1\,]$.

D'où: $(1) \Rightarrow 0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(1)$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{2}{e} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1.$$

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$.**

2. b Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1 \iff \begin{cases} U_n \leqslant U_{n+1} \\ U_n \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 1 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: **la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".**

3. Montrons que la limite de la suite (U_n) est " $\ln(2)$ ":

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in [0; 1]$ telle que:

$$f(\ell) = \ell.$$

$f(\ell) = \ell \iff 2\ell e^{-\ell} = \ell$

$$\iff \begin{cases} \ell = 0 \\ ou \\ \ell = \ln(2). \end{cases}$$

Comme $U_0 = 0{,}1$, écartons $\ell = 0$ et par conséquent la suite (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = \ln(2) \in [0; 1]$.

4. a. Justifions que $\ln(2) - U_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

A la question précédente, nous venons de voir que la suite (U_n) est convergente et **converge vers $\ell = \ln(2)$.**

Donc pour tout entier naturel n, nous pouvons affirmer que:

$$U_n \leq \ln(2) \text{ ou } \ln(2) - U_n \geq 0.$$

4. b. Recopions et complétons le script:

Le script complété afin qu'il réponde au problème posé est le suivant:

```
from math import exp
from math import log as ln
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2) - u > 0.0001:
    n=n+1
    u=2*u*exp(-u)
  return(u,n)
```


4. c. Donnons la valeur de la variable " n " renvoyée par la fonction *seuil ()* :

La valeur de la variable n renvoyée est : $n = 11$.