BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2024

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Précisons $f(-1)$ et $f'(-1)$:

Ici: • $A(0; -1)$ et $B(-1; y)$

• $\mathcal{D}f =]-2; +\infty[$.

Dans ces conditions, graphiquement nous avons: $f(-1) = y = -2$.

Quant à $f'(-1)$: $f'(-1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ cad $f'(-1) = \dfrac{-2-(-1)}{-1-0} = 1$.

Ainsi: $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = 1$.

2. f est-elle convexe sur son ensemble de définition ?

D'après le cours: sur $]-2; +\infty[$, f est concave ssi sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Or ici, $\mathcal{C}_f$ passe en dessous de sa tangente T pour les valeurs x inférieures à $-1,8$.

Donc: **f n'est pas convexe sur son ensemble de définition.**

3. a. Conjecturons le nombre de solutions de $f(x) = 0$:

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses **en un seul point**.

Le nombre de solutions de $f(x) = 0$ est donc égal à: 1.

3. b. Donnons une valeur arrondie à 10^{-1} près de la solution:

Une valeur arrondie à 10^{-1} près de la solution est environ égale à: $0,1$.

PARTIE B

1. Calculons la limite de f en " -2 " et interprétons:

Ici:
- $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$ $\quad (U + \ln(V))$
- $\mathcal{D}f =]-2\,;+\infty[$.

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2).$$

Or:
- $\lim\limits_{x \to -2^+} x^2 + 2x - 1 = -1$

- $\lim\limits_{x \to -2^+} \ln(x+2) = \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X)$, **avec**: $X = x + 2$

$= -\infty.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -1 + (-\infty) = -\infty.$

Cela signifie que: la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

2. Montrons que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$:

La fonction f est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]-2 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in]-2 ; +\infty[$: $f'(x) = 2x + 2 + \dfrac{1}{x+2}$ $\left(u' + \dfrac{v'}{v} \right)$

$$= \frac{(2x+2) \times (x+2) + 1}{x+2}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}.$$

D'où pour tout $x \in]-2 ; +\infty[$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}.$

3. Étudions le sens de variation de f sur $]-2 ; +\infty[$:

- Étudions le signe de f' sur $]-2 ; +\infty[$:

Pour tout $x \in]-2\,;+\infty[$: • $x+2>0$

• $2x^2+6x+5>0$ ($\Delta = -4 < 0$).

Dans ces conditions, pour tout $x \in]-2\,;+\infty[$: $f'(x) > 0$.

Ainsi : f est strictement croissante sur $]-2\,;+\infty[$.

• Dressons le tableau de variations de f sur $]-2\,;+\infty[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$ est :

x	-2		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ a	$\nearrow$	b

Avec : • $a = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

• $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;+\infty[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $]-2; +\infty[$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

et: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

• f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]-2; +\infty[$.

4. b. Donnons une valeur arrondie de α à 10^{-2} près:

A l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près est:

$$1,12 \text{ car } 0,115 < \alpha < 0,12.$$

5. Déduisons-en le signe de $f(x)$ sur $]-2; +\infty[$:

Des questions précédentes, nous pouvons en déduire le signe de la fonction f pour $x \in]-2; +\infty[$, via le tableau suivant:

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	-	0	+	

6. Montrons que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminons son abscisse:

D'après le cours, si f'' s'annule et change de signe en a alors $\mathscr{C}_f$ admet un pont d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

• Calcul de f'' sur $]-2\,;+\infty[$:

La fonction f est deux fois dérivable sur $]-2\,;+\infty[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f'' pour tout $x \in]-2\,;+\infty[$, sachant que:

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right).$$

Pour tout $x \in]-2\,;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{(4x + 6) \times (x + 2) - (2x^2 + 6x + 5) \times (1)}{(x + 2)^2}$

$$\left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{4x^2 + 8x + 6x + 12 - 2x^2 - 6x - 5}{(x + 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 8x + 7}{(x + 2)^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-2\,;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 7}{(x + 2)^2}$.

• Détermination du signe de f'':

Sur $]-2\,;+\infty[$: $(x + 2)^2 > 0$.

Donc le signe de f'' dépend du signe de $2x^2 + 8x + 7$.

Soit l'équation: $2x^2 + 8x + 7 = 0$. $\quad (ax^2 + bx + c = 0)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes:

$$\bullet\ x_1 = \frac{-8 - \sqrt{8}}{4} = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \notin]-2 ; +\infty[$$

$$\bullet\ x_2 = \frac{-8 + \sqrt{8}}{4} = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \in]-2 ; +\infty[.$$

Ainsi: $\bullet\ f''(x) < 0$ sur $\left]-2 ; -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

$\bullet\ f''(x) > 0$ sur $\left]-2 + \frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$.

• **Conclusion**:

→ f est **strictement concave** sur $\left]-2 ; -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

→ f est **strictement convexe** sur $\left]-2 + \frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$.

→ f'' s'annule et change de signe en: $x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse x avec:

$$x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29.$$

PARTIE C

1. Justifions que pour tout $x > -2$, $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$:

Ici:
- $h(x) = JM^2$
- $g(x) = \ln(x+2)$
- $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h =]-2 ; +\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]-2 ; +\infty[$:

$$h(x) = JM^2 \iff h(x) = (x_M - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2$$

$$= (x_M - 0)^2 + (y_M - 1)^2$$

$$= x^2 + [\ln(x+2)] - 1]^2.$$

Ainsi, nous avons bien: $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2. a. Dressons le tableau de variations de h sur $]-2 ; +\infty[$:

La fonction h est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$ et nous avons:

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2} \iff h'(x) = \frac{2[x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)]}{x+2}.$$

Sur $]-2 ; +\infty[$, le signe de h' dépend du signe de f car $x + 2 > 0$.

Or nous savons que:

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Dans ces conditions: • $h'(x) \leqslant 0$ sur $]-2\,;\alpha]$

• $h'(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha + \infty[$.

Le tableau de variations de h sur $]-2\,;+\infty[$ est donc:

x	-2		α		$+\infty$
h'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
h	$\|\|$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

2. b. Déduisons-en que la valeur de " x " pour laquelle JM est minimale est " α ":

La distance JM est telle que $JM^2 = h(x) = x^2 + [\ln(x+2)] - 1]^2$.

La distance JM est donc minimale quand **h** (x) est minimale.

Or, d'après la question précédente, **h** atteint son minimum quand:

$$x = \alpha \qquad (h(\alpha)).$$

Donc OUI la distance JM est minimale quand: $x = \alpha$.

3. a. Montrons que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$:

Nous savons que: • $h'(x) = \dfrac{2\,[x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)]}{x+2}$

• $h'(\alpha) = 0$.

D'où: $h'(\alpha) = 0 \iff \dfrac{2\,[\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2)]}{\alpha + 2} = 0$

$\iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0$

cad $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

Ainsi, nous avons bien: $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

3. b. Déduisons-en que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires:

Pour tout $x \in]-2\,;+\infty[$: $g(x) = \ln(x+2)$. ($\ln(u)$)

Dans ces conditions, la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α a pour coefficient directeur:

$$g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2} \qquad \left(\frac{u'}{u}\right).$$

De plus, la droite (JM_α) a pour coefficient directeur:

$$\frac{y_{M_\alpha} - y_J}{x_{M_\alpha} - x_J} = \frac{\ln(\alpha + 2) - 1}{\alpha - 0} = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha} = -\alpha - 2.$$

Comme $\left(\dfrac{1}{\alpha + 2}\right) \times (-\alpha - 2) = -1$, la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont bien perpendiculaires.