BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

FRANCE MÉTROPOLITAINE

2024

$$f(x) = C.e^{-0,08x} + \frac{9}{4}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Justifions que l'ajout fait augmenter le taux de 0, 3 mg.L⁻¹:

Alain décide d'ajouter 15 g de chlore chaque jour.

Or: • 15 g = 15 000 mg de chlore

• 50 m³ d'eau = 50 x 1000 = 50 000 Litres.

Dans ces conditions, ajouter 15 g de chlore revient à augmenter la concentration de: $\frac{15000}{50000} = 0,3$ mg.L^{-1}.

2. a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 4$:

Ici: • $V_{n+1} = 0,92\ V_n + 0,3$ (V_n = taux de chlore en mg.L^{-1})

• $V_0 = 0,7$

• $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 4$ ".

Initialisation: $V_0 \leqslant V_1 \leqslant 4$?

$$\begin{cases} V_0 = 0,7 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ V_1 = 0,92 \times V_0 + 0,3 \quad \text{cad} \quad V_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 \approx 0,944. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $V_0 \leqslant V_1 \leqslant 4$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 4$ et montrons qu'alors $V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 4$.

Supposons: $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 4$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

D'où: (1) $\Rightarrow 0,92 \times V_n \leqslant 0,92 \times V_{n+1} \leqslant 0,92 \times 4$

$\Rightarrow 0,92 \times V_n + 0,3 \leqslant 0,92 \times V_{n+1} + 0,3 \leqslant 0,92 \times 4 + 0,3$

$\Rightarrow V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 0,92 \times 4 + 0,3$

$\Rightarrow V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 3,98 \leqslant 4$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 4$.

2. b. Montrons que la suite (V_n) converge vers ℓ à déterminer:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$V_n \leq V_{n+1} \leq 4 \iff \begin{cases} V_n \leq V_{n+1} \\ V_n \leq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} (V_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (V_n) \text{ est majorée par } M = 4 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: **la suite (V_n) est convergente et converge vers une limite " ℓ " telle que $\ell = 0,92 \times \ell + 0,3$.**

$\ell = 0,92 \times \ell + 0,3 \iff 0,08 \times \ell = 0,3$ cad $\ell = 3,75$.

Ainsi la suite (V_n) converge vers $\ell = 3,75$ mg.L^{-1}.

3. Que se passe-t-il à long terme ?

A long terme, **le taux de chlore** dans l'eau exprimé en **mg.L^{-1}** sera de **3, 75**.

Or les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.

Donc à long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes.

4. Complétons l'algorithme pour qu'il réponde à la question:

L'algorithme complété écrit en language Python pour que la fonction **alerte_chlore** renvoie le plus petit entier " **n** " tel que $V_n > s$ est le suivant:

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    v = 0.7
    while v <= s :
        n = n + 1
        v = 0.92*v + 0.3
    return n
```

5. Déterminons la valeur qu'on obtient en saisissant *alerte_chlore (3)*:

En saisissant l'instruction *alerte_chlore (3)*, le programme renvoie 17.

Cela signifie que si Alain applique cette méthode, 17 jours après le 19 juin, le taux de chlore dans sa piscine sera trop élevé par rapport aux recommandations.

PARTIE B

1. Justifions que la fonction f est de la forme $f(x) = C \cdot e^{-0,08x} + \frac{9}{4}$:

Ici: • x = jours écoulés à compter du 19 juin

• $f(x)$ = taux de chlore en $mg \cdot L^{-1}$ dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle:

$$y' = -0,08y + \frac{9}{50} \qquad (E).$$

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + b$ ($a \in IR^*$, $b \in IR^*$)

sont les fonctions de la forme: $x \to C \cdot e^{ax} + \frac{-b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

Or ici: $a = -0,08$ et $b = \frac{q}{50}$.

D'où: $f(x) = C \cdot e^{ax} + \frac{-b}{a} \iff f(x) = C \cdot e^{-0,08x} + \frac{\frac{-q}{50}}{-0,08}$.

Ainsi la fonction f s'écrit bien sous la forme: $f(x) = C \cdot e^{-0,08x} + \frac{q}{4}$.

2. a. Exprimons en fonction de q la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} C \cdot e^{-0,08x} + \frac{q}{4}$$

$$= \frac{q}{4} + \lim_{x \to +\infty} \frac{C}{e^{0,08x}}$$

$$= \frac{q}{4} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{C}{e^{0,08x}} = 0.$$

La limite de f en $+\infty$ est donc égale à: $\frac{q}{4}$.

2. b. Déterminons les valeurs de C et q afin que les deux conditions soient respectées:

→ Le taux de chlore le 19 juin $= 0,7 \text{ mg} \cdot L^{-1}$: $f(0) = 0,7 \text{ mg} \cdot L^{-1}$.

→ Le taux de chlore se stabilise à $2 \text{ mg} \cdot L^{-1}$, à long terme: $\frac{q}{4} = 2 \text{ mg} \cdot L^{-1}$.

Afin de déterminer les valeurs de C et q, nous allons résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} f(0) = 0,7 \\ \dfrac{q}{4} = 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} f(0) = 0,7 \\ \dfrac{q}{4} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C \cdot e^{-0,08 \times 0} + \dfrac{q}{4} = 0,7 \\ \dfrac{q}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C + \dfrac{q}{4} = 0,7 \\ q = 8 \end{cases}$$

cad $\begin{cases} C = -1,3 \\ q = 8 \end{cases}.$

Ainsi les valeurs recherchées de C et q sont: $C = -1,3$ et $q = 8$.

Et nous pouvons écrire: $f(x) = -1,3 \times e^{-0,08x} + 2$.