BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

AMÉRIQUE DU NORD
2024

$f(x) = a \cdot \ln(x)$

CORRECTION

1. Déterminons l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses:

Ici: • $f(x) = a \cdot \ln(x)$

• $\mathcal{D}f =]\,0\,;+\infty\,[$.

Le point d'intersection $C\,(x_C, y_C)$ entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses vérifie le système suivant: $\begin{cases} f(x_C) = a \cdot \ln(x_C) \\ y_C = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} f(x_C) = a \cdot \ln(x_C) \\ y_C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = a \cdot \ln(x_C) \\ y_C = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln(x_C) = 0 \\ y_C = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_C = e^0 \\ y_C = 0 \end{cases}$$

cad $\begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 0 \end{cases}$.

Le point C d'intersection est donc: $C(1; 0)$.

2. Vérifions que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$:

Ici: • $F(x) = a.(x\ln(x) - x)$

• $\mathcal{D}_F =]0; +\infty[$.

La fonction $f(x) = a.\ln(x)$ est continue sur $]0; +\infty[$.

Elle admet donc une primitive sur $]0; +\infty[$ cad une fonction F dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que: $F' = f$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $F'(x) = a.\left[\left(1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right) - 1\right]$

$(a \times (U' \times V + U \times V' + W'))$

$= a.[(\ln(x) + 1) - 1]$

$= a.[\ln(x)]$

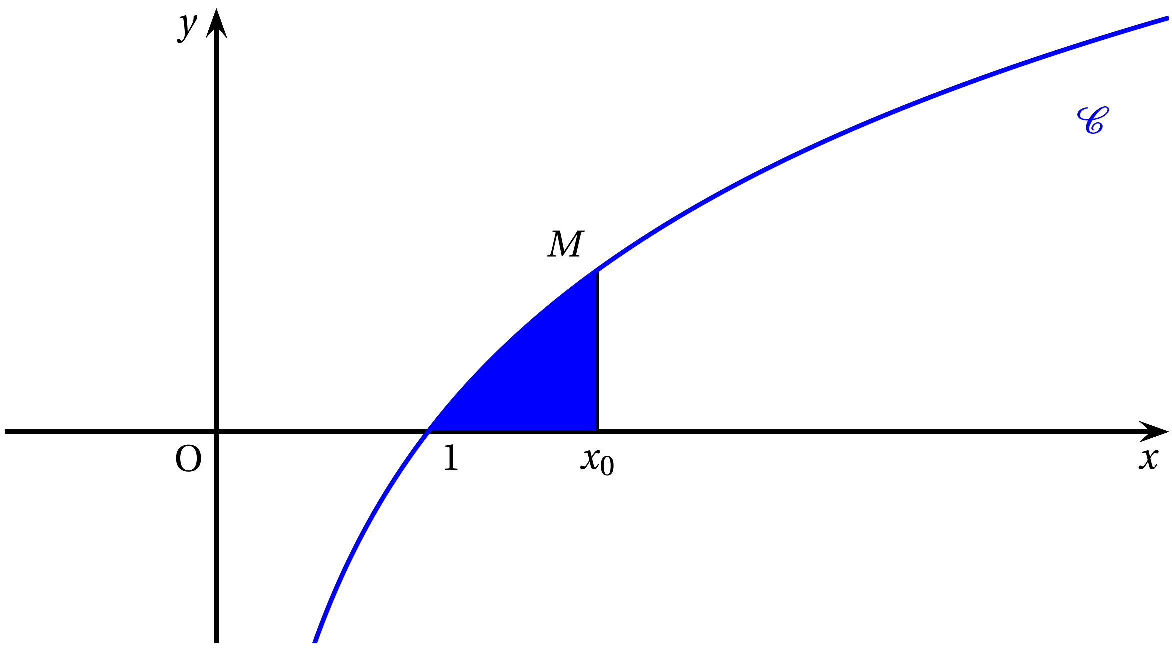
$= f(x)$.

Comme pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F'(x) = f(x)$: F est bien une primitive de f.

3. Déduisons-en l'aire du domaine bleuté en fonction de " a " et de " x_0 ":

Déduire l'aire du domaine bleuté revient à calculer:

$$I = \int_1^{x_0} f(x)\,dx.$$



$$I = \int_1^{x_0} f(x)\,dx \iff I = \int_1^{x_0} a \,.\, \ln(x)\,dx$$

$$\iff I = [\, a \,.\, (\, x \ln(x) - x \,)\,]_1^{x_0}$$

(F est une primitive de f)

$$\iff I = a \,.\, [\,(\, x_0 \ln(x_0) - x_0 \,) - (\, - 1 \,)\,]$$

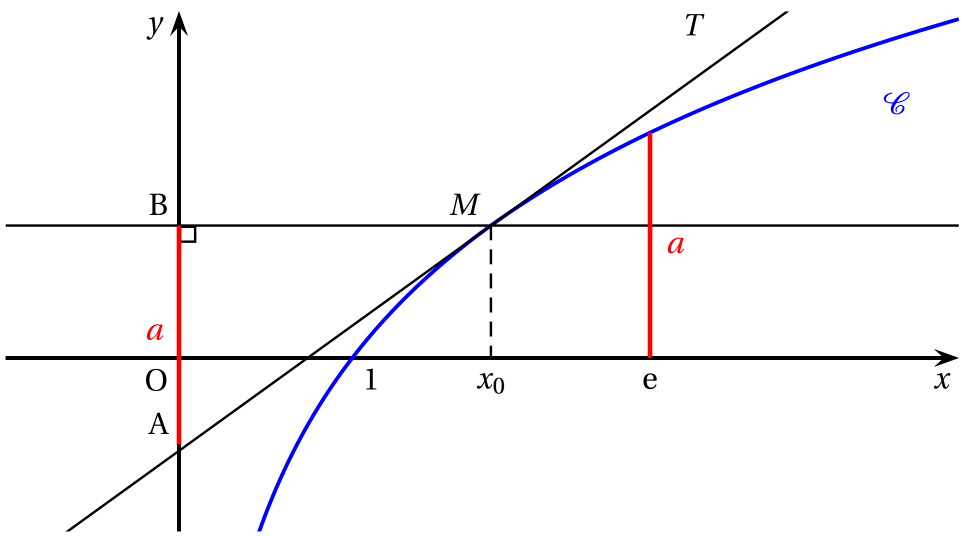
cad $I = a \,.\, (\, x_0 \ln(x_0) - x_0 + 1 \,).$

En unités d'aire, l'aire du domaine demandée est égale à:

$$I = a \,.\, (\, x_0 \ln(x_0) - x_0 + 1 \,).$$

4. Montrons que la longueur AB est égale à une constante:

Il s'agit donc de montrer que la longueur **AB** est égale à un nombre qui ne dépend pas de " x_0 ".



Étape 1: Détermination de l'équation T

T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M (x_0 ; f (x_0)).

L'équation réduite de la tangente T demandée s'écrit:

$$y = f'(x_M) \times (x - x_M) + f(x_M)$$

cad $\quad y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$

ou encore $\quad y = \dfrac{a}{x_0}(x - x_0) + a \ln(x_0)$.

L'équation réduite de la tangente T est donc: $y = a \times x + a \times (\ln(x_0) - 1)$.

Étape 2: Détermination des coordonnées du point A

Le point d'intersection A (x_A ; y_A) entre la tangente T et l'axe des ordonnées vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} y_A = a \times [\, x_A + (\ln(x_0) - 1)\,] \\ x_A = 0 \end{cases}$$

$$\text{cad} \quad \begin{cases} y_A = a \times (\ln(x_0) - 1) \\ x_A = 0 \end{cases} .$$

Le point A d'intersection est donc: A (0 ; $a \times (\ln(x_0) - 1)$).

Étape 3: Calcul de la longueur AB

Nous savons que les coordonnées du point B sont:

$$B\,(x_0\,;\, a \,.\, \ln(x_0)).$$

Dans ces conditions, la longueur AB est égale à:

$$L = |\, y_B - y_A \,|$$

$$= |\, a \times \ln(x_0) - a \times (\ln(x_0) - 1)\,|$$

$$= a.$$

Au total, la longueur AB est bien égale à une constante: $a > 0$.