www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

AMÉRIQUE DU NORD
2024

$g(x) = 2x - x^2$

CORRECTION

1. a. Montrons que la fonction g est strictement croissante sur $[0; 1]$:

Ici: • $g(x) = 2x - x^2$ (U)

• $\mathcal{D}g = [0; 1]$.

• Calcul de la dérivée de g sur $[0; 1]$:

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. Donc g est dérivable sur $[0; 1]$, et nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [0; 1]$.

Pour tout $x \in [0; 1]$: $g'(x) = 2 - 2x$. (U')

D'où pour tout $x \in [0; 1]$: $g'(x) = 2 - 2x$.

• Étudions le signe de g' sur $[0; 1]$:

Distinguons deux cas:

1[er] cas: $g'(x) \leqslant 0$ ssi $2 - 2x \leqslant 0$ cad ssi $x \in [1; +\infty[$

2[e] cas: $g'(x) \geqslant 0$ ssi $2 - 2x \geqslant 0$ cad ssi $x \in [0; 1]$.

Comme sur $[0; 1]$, $g'(x) \geq 0$ et s'annule en $x = 1$: la fonction g est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. b. Précisons les valeurs de $g(0)$ et $g(1)$:

Nous avons: • $g(0) = 2 \times 0 - 0^2 = 0$

• $g(1) = 2 \times 1 - 1^2 = 1$.

2. Calculons U_1 et U_2:

Ici: • $U_{n+1} = g(U_n) = 2U_n - U_n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = \frac{1}{2}$.

D'où: • $U_1 = 2U_0 - U_0^2$

$$= 2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

• $U_2 = 2U_1 - U_1^2$

$$= 2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{15}{16}.$$

Ainsi: $U_1 = \frac{3}{4}$ et $U_2 = \frac{15}{16}$.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < U_{n+1} < 1$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 < U_n < U_{n+1} < 1$ ".

Initialisation: $0 < U_0 < U_1 < 1$?

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} & \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} & \\ U_1 = \dfrac{3}{4} & \text{d'après la question précédente.} \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $0 < U_0 < U_1 < 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 < U_n < U_{n+1} < 1$ et montrons qu'alors $0 < U_{n+1} < U_{n+2} < 1$.

Supposons: $0 < U_n < U_{n+1} < 1$ pour un entier naturel n fixé.
(1)

Notons que: g est strictement croissante sur [0; 1].

D'où (1) => $0 < U_n < U_{n+1} < 1$ => $g(0) < g(U_n) < g(U_{n+1}) < g(1)$

=> $0 < U_{n+1} < U_{n+2} < 1$.

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $0 < U_n < U_{n+1} < 1$.**

4. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0 < U_n < U_{n+1} < 1 \iff \begin{cases} U_n < U_{n+1} \\ U_n < 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (U_n) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ admet } M = 1 \text{ comme majorant strict.} \end{cases}$$

Or d'après le cours, toute suite strictement croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente **et** converge vers " ℓ ".

5. Déterminons la limite ℓ de la suite (U_n):

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in [0; 1]$ telle que: $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \iff 2\ell - \ell^2 = \ell$$

$$\iff \ell - \ell^2 = 0$$

$$\iff \ell \times (1 - \ell) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell = 1. \end{cases}$$

Comme $U_0 = \frac{1}{2}$ et que la suite (U_n) est strictement croissante sur IN, la suite (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = 1 \in [0; 1]$.

6. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison 2 et précisons son premier terme:

Ici pour tout $n \in$ IN:
- $U_{n+1} = 2U_n - U_n^2$
- $V_n = \ln(1 - U_n)$.

$V_n = \ln(1 - U_n) \iff V_{n+1} = \ln(1 - U_{n+1})$

$\iff V_{n+1} = \ln(1 - 2U_n + U_n^2) \quad (1).$

Or: $V_0 = \ln(1 - U_0)$ cad $V_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et $U_n = 1 - e^{V_n}$.

D'où: $(1) \iff V_{n+1} = \ln(1 - 2U_n + U_n^2)$

$= \ln(1 - U_n)^2$

$= 2 \times \ln(1 - U_n)$

$= 2 \times \ln(1 - 1 + e^{V_n})$

$= 2 \times \ln(e^{V_n})$

$= 2 \times V_n$.

(V_n) est donc bien une suite géométrique avec:
- $V_0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
- $q = 2$.

7. **Déduisons-en une expression de V_n en fonction de n:**

Pour tout entier naturel n, d'après le cours: $V_n = V_0 \times q^n$.

D'où ici: $V_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n$ ou encore $V_n = -\ln(2) \times 2^n$.

8. a. **Déduisons-en U_n en fonction de n:**

Nous savons que:
- $U_n = 1 - e^{V_n}$
- $V_n = -\ln(2) \times 2^n$.

Dans ces conditions: $U_n = 1 - e^{V_n}$ cad $U_n = 1 - e^{-2^n \times \ln(2)}$.

8. b. **Retrouvons la limite déterminée à la question 5.:**

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - e^{-2^n \times \ln(2)}$$

$$= 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{2^n \times \ln(2)}}$$

$$= 1 \quad \text{car} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{2^n \times \ln(2)}} = 0.$$

Ainsi nous retrouvons bien la limite déterminée à la question 5.: $\ell = 1$.

9. **Recopions et complétons le script Python:**

Le script Python qui renvoie le **rang n** à partir duquel la suite dépasse **0, 95** est le suivant:

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95:
        n=n + 1
        u=2*u - u**2
    return n
```