BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

AMÉRIQUE DU NORD 2024

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx \;\&\; J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos(x)\,dx$$

CORRECTION

1. Calculons I_0:

Ici pour tout entier n: $I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx$.

Dans ces conditions: $I_0 = \int_0^{\pi} e^{0} \sin(x)\,dx$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

$$= [\cos(x)]_0^{\pi}$$

$$= \cos(\pi) - \cos(0)$$

$$= -1 - 1$$

$$= -2.$$

D'où: $I_0 = -2$.

2. a. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$:

Pour tout réel $x \in [0; \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$: • $\sin(x) \geq 0$,

• $e^{-nx} > 0$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$ et $n \in \mathbb{N}$: $e^{-nx}\sin(x) \geq 0$.

Or: • la fonction qui à " x " associe " $e^{-nx}\sin(x)$ " est continue sur $[\,0\,;\,\pi\,]$,

• la fonction qui à " x " associe " $e^{-nx}\sin(x)$ " admet donc des primitives sur $[\,0\,;\,\pi\,]$ et par conséquent $I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx$ existe,

• de plus, cette fonction est positive sur $[\,0\,;\,\pi\,]$,

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

D'après le cours, nous pouvons donc affirmer que: $I_n \geq 0$.

2. b. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$:

Nous avons: $$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx - \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) \times \left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) \times \left(e^{-nx}\right) \times \left(e^{-x} - 1\right) dx.$$

Or pour tout $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$ et $n \in \mathbb{N}$: • $\sin(x) \times e^{-nx} \geq 0$

• $e^{-x} - 1 = \dfrac{1}{e^{x}} - 1 \leq 0$.

D'où: $\sin(x) \times (e^{-nx}) \times (e^{-x} - 1) \leq 0$.

D'où, d'après le cours et les propriétés des intégrales: $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

2. c. Déduisons-en que la suite (I_n) est convergente:

D'après les questions précédentes, pour tout entier naturel n:

$$\begin{cases} I_{n+1} - I_n \leqslant 0 \\ I_n \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} I_{n+1} \leqslant I_n \\ I_n \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (I_n) \text{ est décroissante sur } \mathbb{N} \\ (I_n) \text{ est minorée par } m = 0 \end{cases}$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Donc ici: la suite (I_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

3. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}\, dx$:

Pour tout réel $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons:
- $g(x) = \sin(x) \times e^{-nx}$
- $h(x) = e^{-nx}$

Or pour tout $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$ et $n \in \mathbb{N}$: $g(x) \geqslant 0$, d'après 2. a.

et: $h(x) > 0$.

Notons que:
- les fonctions g et h sont continues sur $[\,0\,;\,\pi\,]$,
- elles admettent donc des primitives sur $[\,0\,;\,\pi\,]$, et par conséquent: $\int_0^{\pi} g(x)\, dx$ et $\int_0^{\pi} h(x)\, dx$ existent,
- de plus, les fonctions g et h sont positives sur $[\,0\,;\,\pi\,]$,

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Comme pour tout $x \in [0 ; \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, $g(x) \leqslant h(x)$, nous pouvons affirmer que: $\int_0^{\pi} g(x) \leqslant \int_0^{\pi} h(x)$ cad $I_n \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$.

3. b. Montrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$:

Nous allons calculer l'intégrale $K = \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$ pour répondre à la question.

La fonction $h(x) = e^{-nx}$ est continue sur $[0 ; \pi]$.

Elle admet donc des primitives sur $[0 ; \pi]$ et par conséquent **K existe**.

$$K = \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^{\pi}$$

$$= \left(-\frac{1}{n} e^{-n \times \pi} \right) - \left(-\frac{1}{n} e^{-n \times 0} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \times (-e^{-n\pi} + 1).$$

Ainsi, nous avons bien: $K = \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$.

3. c. Déduisons-en la limite de la suite (I_n):

Pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons: $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$

cad $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$.

Quand n tend vers $+\infty$: • $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

• $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-n\pi}}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n \times e^{n\pi}}$

$= 0 - 0$

$= 0$.

D'où d'après le **théorème des gendarmes**, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

4. a. Établissons les deux relations demandées à l'aide d'IPP:

Les deux relations que nous devons mettre à jour sont:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - n J_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n} J_n.$$

Ici: $I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\, dx$.

Méthode 1: IPP,

Ayons recours à une IPP pour le calcul de l'intégrale I_n.

Posons: • $u(x) = e^{-nx}$, d'où $u'(x) = -n\, e^{-nx}$

• $v'(x) = \sin(x)$, d'où $v(x) = -\cos(x)$.

(u et v admettent des dérivées continues sur $[0; \pi]$)

Dans ces conditions: $I_n = \Big[u(x) \times v(x) \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v(x) \times u'(x)\, dx$

$$= \Big[(e^{-nx}) \times (-\cos(x)) \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos(x)) \times (-n\, e^{-nx})\, dx$$

$$= e^{-n\pi} + 1 - n \times \int_0^{\pi} e^{-nx} \times \cos(x)\, dx$$

$$= 1 + e^{-n\pi} - n \times J_n.$$

Ainsi, via la méthode 1: $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n\, J_n.$

Méthode 2: IPP_2

Ayons recours à une IPP pour le calcul de l'intégrale I_n.

Posons: • $u(x) = \sin(x)$, d'où $u'(x) = \cos(x)$

• $v'(x) = e^{-nx}$, d'où $v(x) = -\dfrac{1}{n}\, e^{-nx}.$

Dans ces conditions: $I_n = \Big[(\sin(x)) \times \Big(-\dfrac{1}{n} e^{-nx} \Big) \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \Big(-\dfrac{1}{n} e^{-nx} \Big) \times (\cos(x))\, dx$

$$= 0 + \frac{1}{n} \times \int_0^{\pi} e^{-nx} \times \cos(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{n} \times J_n.$$

Ainsi, via la méthode 2: $I_n = \dfrac{1}{n}\, J_n.$

4. b. Déduisons-en I_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: • $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n\,J_n$

• $I_n = \frac{1}{n}\,J_n$ cad $J_n = n \times I_n$.

D'où: $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n\,J_n \iff I_n = 1 + e^{-n\pi} - n \times (n \times I_n)$

$\iff I_n = 1 + e^{-n\pi} - n^2\,I_n$

$\iff I_n \times (1 + n^2) = 1 + e^{-n\pi}$

cad $I_n = \dfrac{1 + e^{-n\pi}}{1 + n^2}$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous avons bien: $I_n = \dfrac{1 + e^{-n\pi}}{1 + n^2}$.

5. Complétons la cinquième ligne du script Python:

Pour obtenir le rang **n** à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à **0.1**, la 5e ligne du script Python doit s'écrire:

```
1    from math import *
2    def seuil() :
3       n = 0
4       I = 2
5    while I >=0.1:
6          n=n+1
7          I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8    return n
```