BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

AMÉRIQUE DU NORD
2024

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. a. Déterminons graphiquement $f'(1)$:

Ici: • $A(1;-1)$ et $B(0;-4)$

• $\mathcal{D}f =]0;+\infty[$.

Dans ces conditions, graphiquement nous avons:

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{cad} \quad f'(1) = \frac{-4-(-1)}{0-1}$$

$$= 3.$$

Ainsi: $f'(1) = 3$.

1. b. Donnons l'équation réduite de la tangente (T):

Il s'agit ici de déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(1;-1)$.

L'équation réduite de la tangente (T) demandée s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad $y = f'(1) \times (x - 1) + (-1)$

ou encore $y = 3(x - 1) - 1.$

L'équation réduite de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point A est donc: $y = 3x - 4.$

2. a. Donnons les intervalles sur lesquels f semble être convexe ou concave:

D'après le graphique, f semble être:
- concave sur $]0 ; 1]$
- convexe sur $[1 ; +\infty[$.

2. b. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A ?

La courbe $\mathscr{C}_f$ semble traverser la tangente au point A et semble donc admettre un point d'inflexion au point A $(1 ; -1)$.

PARTIE B

1. a. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

Ici:
- $f(x) = x \ln(x^2) - \dfrac{1}{x}$ $\quad (U \times \ln(V) + W)$
- $\mathscr{D}f =]0 ; +\infty[$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = 2x \ln(x) - \frac{1}{x}$. $(x > 0)$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x \ln(x) - \frac{1}{x}$.

Or: • $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(x) = +\infty$, d'après le cours

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \times (+\infty) - 0 = +\infty$.

1. b. Déterminons la limite de f en 0^+:

En 0^+, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = 2x \ln(x) - \frac{1}{x}$. $(x > 0)$

D'où: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x \ln(x) - \frac{1}{x}$.

Or: • $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ (Croissances Comparées)

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - (+\infty) = -\infty$.

2. a. Déterminons f' sur $]0; +\infty[$:

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = (1) \times (\ln(x^2)) + (x) \times \left(\frac{2x}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}$

$$\left(U' \times \ln(V) + U \times \left(\frac{V'}{V}\right) + W' \right)$$

$$= \ln(x^2) + \frac{1}{x^2} + 2.$$

D'où pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = 2\ln(x) + \frac{1}{x^2} + 2$.

2. b. Calculons f'' sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Nous savons que: • $f'(x) = 2\ln(x) + \frac{1}{x^2} + 2$

• $\mathcal{D}f' =]\,0\,;+\infty\,[$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ d'après l'énoncé.

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}$

$$= \frac{2x^2 - 2}{x^3}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$$

$$= \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

$$\left((a^2 - b^2) = (a+b)(a-b) \right)$$

D'où pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

3. a. Étudions la convexité de f sur $]0;+\infty[$:

D'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Pour répondre à la question, nous allons étudier le signe de f'' sur $]0;+\infty[$.

Notons que sur $]0;+\infty[$: • $x^3 > 0$

• $x - 1 > 0$.

Donc le signe de f'' dépend uniquement du signe de $x - 1$.

Distinguons deux cas:

1er cas: $f''(x) \leqslant 0$ ssi $x - 1 \leqslant 0$ cad ssi $x \in]0;1]$

2e cas: $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x - 1 \geqslant 0$ cad ssi $x \in [1;+\infty[$.

En conclusion: • f est concave sur $]0;1]$

• f est convexe sur $[1;+\infty[$.

3. b. b_1. Étudions les variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$:

D'après la question précédente, nous pouvons affirmer que:

• f' est décroissante sur $]0;1]$

• f' est croissante sur $[1;+\infty[$.

D'où le tableau de variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$ est:

x	0		1		$+\infty$
f''	$\|$	$-$	0	$+$	
f'	$\|$ a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec : • $a = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$

• $b = f'(1) = 2 \times \ln(1) + \dfrac{1}{1^2} + 2 = 3$

• $c = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$.

3. b. b_2. Déduisons-en le signe de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et le sens de variation de f :

Notons que le point C (1 ; 3) correspond à l'extremum de la fonction f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Il s'agit du minimum de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Comme le minimum de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est le point C (1 ; 3) et que $3 > 0$, nous pouvons affirmer que sur $]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) > 0$.

Dans ces conditions, sur $]\,0\,;+\infty\,[$: f est strictement croissante.

4. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: **Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;\,b\,]$ ou $I =]\,a\,;\,b\,[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.**

Ici:
- f est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$,
- " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

  et: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
- f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]\,0\,;+\infty\,[$.

4. b. b$_1$. Donnons la valeur arrondie au centième de α:

A l'aide d'une calculatrice, une valeur arrondie au centième de α est:

$$1,33 \quad \text{car} \quad 1,32 < \alpha < 1,33.$$

4. b. b$_2$. Montrons que α vérifie $\alpha^2 = e^{1/\alpha^2}$:

Nous savons que: $f(\alpha) = 0$.

D'où: $f(\alpha) = 0 \iff \alpha \times \ln(\alpha^2) - \dfrac{1}{\alpha} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha \times \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{\ln(\alpha^2)} = e^{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$$

cad $\alpha^2 = e^{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$.

Ainsi, nous avons bien: $\alpha^2 = e^{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$.