BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

ASIE

2024

$f(x) = x^2 - x \ln(x)$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons les limites de f en " 0 " et en " $+\infty$ ":

Ici: • $f(x) = x^2 - x \ln(x)$ ($U + V \times \ln(W)$)

• $\mathcal{D}f =]\,0\,; +\infty\,[$.

→ **Limite de f en 0^+:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 - x \ln(x).$$

Or: • $\lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$

• $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$, d'après le cours.

Dans ces conditions: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$.

→ **Limite de f en $+\infty$:**

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x^2 \times \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. $(x > 0)$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \times \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

Or:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. (Croissances Comparées)

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$.

2. Calculons f' pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$:

La fonction f est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$.

Pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$: $f'(x) = (2x) - \left((1) \times (\ln(x)) + (x) \times \left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$$\left(U' + V' \times \ln(W) + V \times \frac{W'}{W}\right)$$

$$= 2x - \ln(x) - 1.$$

D'où pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$: $f'(x) = (2x - 1) - \ln(x)$.

3. Calculons f'' pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$:

La fonction f est deux fois dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ d'après l'énoncé.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$

$$= \frac{2x-1}{x}.$$

D'où pour tout $x \in]0;+\infty[$, nous avons bien : $f''(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.

4. a. Étudions les variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$:

Nous savons que sur $]0;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.

Comme $x > 0$, le signe de f'' dépend du signe de $2x - 1$.

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0;+\infty[$, **sachant que $x > 0$** :

- $f''(x) \leqslant 0$ ssi $2x - 1 \leqslant 0$ cad $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $x \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right]$
- $f''(x) \geqslant 0$ ssi $2x - 1 \geqslant 0$ cad $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ ou $x \in \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Dans ces conditions :
- la fonction f' est décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$
- la fonction f' est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

4. b. Dressons le tableau de variations de f' sur $]0;+\infty[$:

Le tableau de variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$ est :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f''	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f'	$\|\|$ a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec : • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$

• $b = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln(2)$

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

Notons que le point $A\left(\frac{1}{2}\,;\ln(2)\right)$ correspond à l'extremum de la fonction f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Il s'agit du minimum de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

5. Montrons que la fonction f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Comme le minimum de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est le point $A\left(\frac{1}{2}\,;\ln(2)\right)$ et que $\ln(2) > 0$, nous pouvons affirmer que sur $]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) > 0$.

Dans ces conditions, sur $]\,0\,;+\infty\,[$: f est strictement croissante.

PARTIE B

1. a. Calculons g' sur $]0;+\infty[$:

Ici: • $g(x) = x - \ln x$ $\quad (U + \ln(V))$

• $\mathcal{D}g =]0;+\infty[$.

La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ $\quad \left(U' + \dfrac{V'}{V}\right)$

$$= \frac{x-1}{x}.$$

D'où pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

1. b. Dressons le tableau de variations de la fonction g:

Comme $x > 0$: le signe de g' dépend du signe de $x - 1$.

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0;+\infty[$, **sachant que $x > 0$**:

• $g'(x) \leqslant 0$ ssi $x - 1 \leqslant 0$ cad $x \leqslant 1$ ou $x \in]0;1]$

• $g'(x) \geqslant 0$ ssi $x - 1 \geqslant 0$ cad $x \geqslant 1$ ou $x \in [1;+\infty[$.

Dans ces conditions: • la fonction g est décroissante sur $]0;1]$

• la fonction g est croissante sur $[1;+\infty[$.

D'où le tableau de variations de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

x	0		1		$+\infty$
g'	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

• $b = g(1) = 1$ (minimum de g sur $]\,0\,;+\infty\,[$)

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. Résolvons sur $]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation $f(x) = x$:

" 1 " est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

Dans ces conditions: $f(x) = x \iff x^2 - x \times \ln(x) = x$

$\iff x - \ln(x) = 1$, car: $x > 0$

$\iff g(x) = 1$

cad $x = 1$.

D'où l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $]\,0\,;+\infty\,[$: $x = 1$.

PARTIE C

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$:

Ici:
- $U_{n+1} = f(U_n)$
- $U_0 = \frac{1}{2}$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $\frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ ".

Initialisation: $\frac{1}{2} \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$?

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 = U_0^2 - U_0 \times \ln(U_0) \quad \text{cad} \quad U_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0,597. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $\frac{1}{2} \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$

et montrons qu'alors $\frac{1}{2} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1$.

Supposons: $\underbrace{\frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

Notons que: f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

D'où (1) $\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(1)$

$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1$.

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$.**

2. Justifions que la suite (U_n) converge:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$\frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1 \iff \begin{cases} U_n \leqslant U_{n+1} \\ U_n \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 1 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: **la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".**

3. Déterminons la valeur de la limite " ℓ ":

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in]0;+\infty[$

telle que: $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff \ell^2 - \ell \times \ln(\ell) = \ell$

$\iff \ell - \ln(\ell) = 1$

cad $\ell = 1$.

Au total, la suite (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = 1 \in]0;+\infty[$.