BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

ASIE
2024

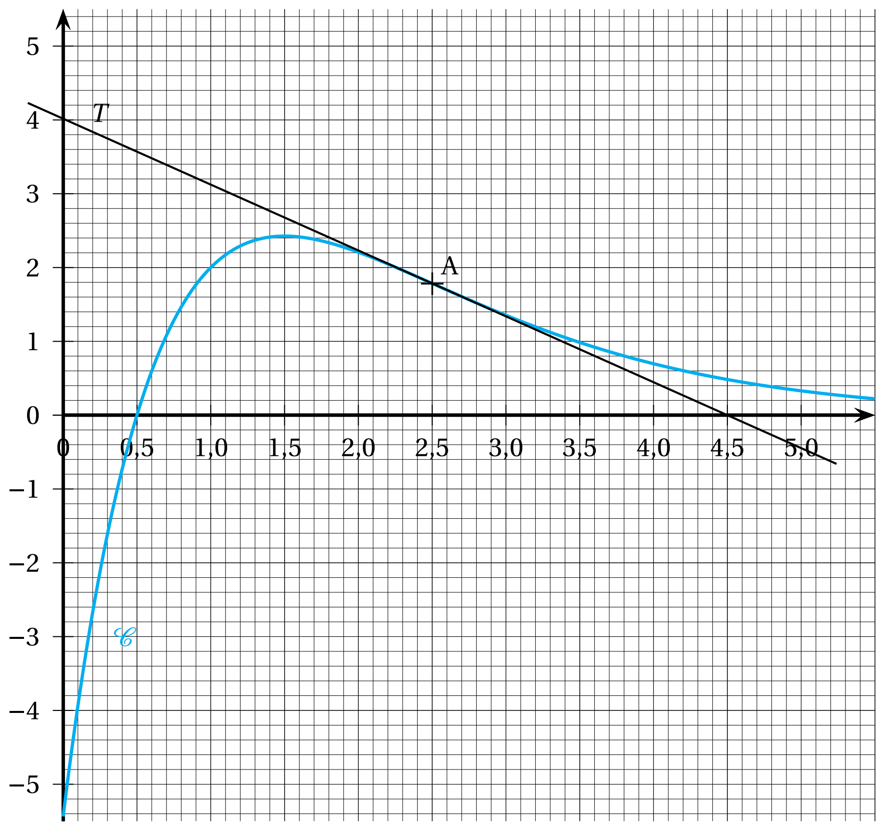
$f(x) = (4x - 2)\,e^{-x+1}$

CORRECTION

PARTIE A

1. Dressons le tableau de variations de f sur $[\,0\,;\,5\,]$:

La représentation graphique de la fonction f sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ est la suivante:



Notons que: T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A\left(\frac{5}{2};f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$.

Dans ces conditions, le tableau des variations de f sur $[0;5]$ est le suivant:

x	0		$1,5$		5
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = -5,5$

• $b = 2,4$ (maximum de f sur $[0;5]$)

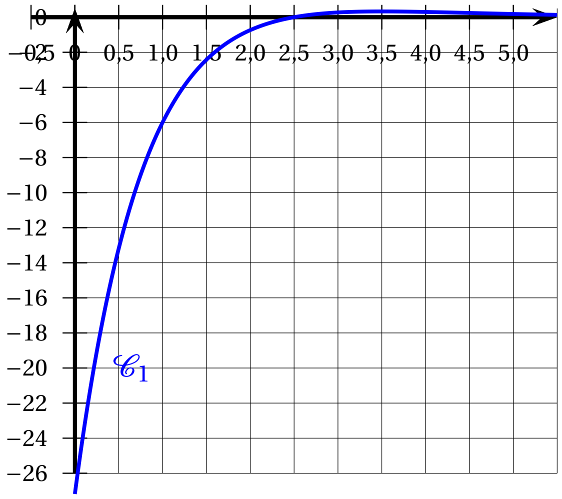
• $c = 0,35$.

2. Que semble présenter la courbe $\mathcal{C}$ au point A ?

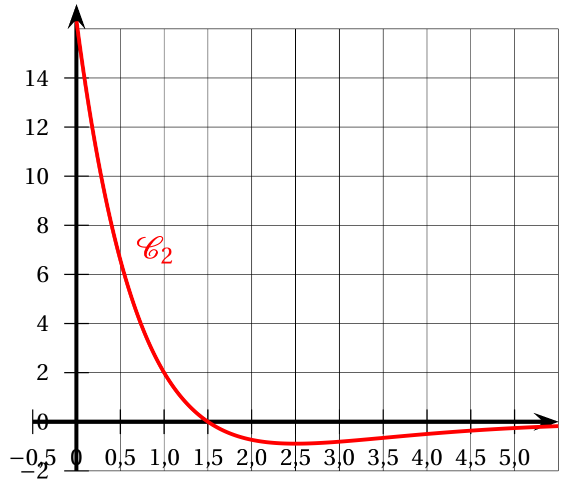
La courbe $\mathcal{C}$ semble traverser la tangente au point A et semble donc admettre un point d'inflexion au point $A\left(\frac{5}{2};f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$.

3. Associons à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente:

Soient les représentations graphiques suivantes de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$:



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

D'après la question précédente : • $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\,0\,;\,1{,}5\,]$

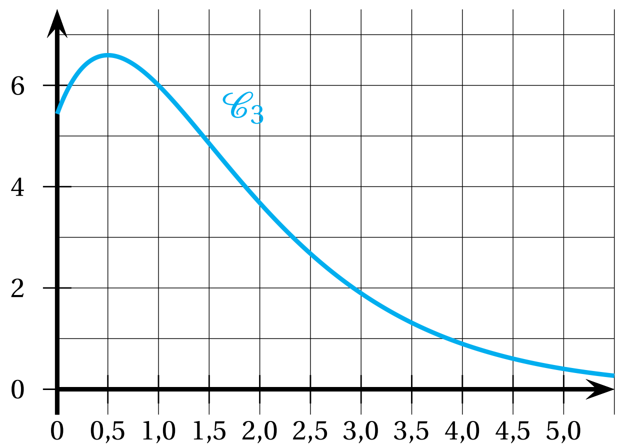
• $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\,1{,}5\,;\,5\,]$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que : $\mathcal{C}_2$ correspond à la courbe de f'.

Et donc, par élimination : $\mathcal{C}_1$ correspond à la courbe de f''.

4. La courbe $\mathcal{C}_3$ = primitive de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$?

La représentation graphique de $\mathcal{C}_3$ est :



Soit F une primitive de la fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions: **$F' = f$ et $F'' = f'$.**

Or, d'après la représentation graphique de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$, **f est négative sur $[\,0\,;0,5\,]$ et est positive sur $[\,0,5\,;+\infty\,[$.**

Donc normalement, F devrait être:
- **décroissante sur $[\,0\,;0,5\,]$**
- **croissante sur $[\,0,5\,;+\infty\,[$.**

Ce n'est pas ce qu'indique la représentation graphique de $\mathcal{C}_3$!

La représentation graphique de $\mathcal{C}_3$ dit exactement le contraire: la courbe $\mathcal{C}_3$ n'est donc pas la représentation graphique de F sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

PARTIE B

1. a. Montrons que $f'(x) = (-4x+6)\,e^{-x+1}$:

Ici:
- $f(x) = (4x-2)\,e^{-x+1}$ $\quad (U \times e^V)$
- $\mathcal{D}f = [\,0\,;+\infty\,[$.

La fonction f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = (4) \times (e^{-x+1}) + (4x-2) \times (-e^{-x+1})$

$(U' \times e^V + U \times V' \times e^V)$

$= e^{-x+1} \times (4 - 4x + 2)$

$= (-4x + 6) \times e^{-x+1}.$

D'où pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$: $f'(x) = (-4x + 6) \times e^{-x+1}.$

1. b. Dressons le tableau de variations de f sur $[\, 0 ; +\infty \,[$:

Étape 1 : Étude du signe de f' sur $[\, 0 ; +\infty \,[$

Pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$: $e^{-x+1} > 0.$

D'où le signe de f' dépend du signe de $(-4x + 6)$.

Distinguons deux cas pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$, sachant que $e^{-x+1} > 0$:

- $f'(x) \leqslant 0$ ssi $-4x + 6 \leqslant 0$ cad $x \geqslant \dfrac{3}{2}$ ou $x \in \left[\dfrac{3}{2} ; +\infty \right[$
- $f'(x) \geqslant 0$ ssi $-4x + 6 \geqslant 0$ cad $x \leqslant \dfrac{3}{2}$ ou $x \in \left[0 ; \dfrac{3}{2} \right].$

Dans ces conditions :
- la fonction f est croissante sur $\left[0 ; \dfrac{3}{2} \right]$
- la fonction f est décroissante sur $\left[\dfrac{3}{2} ; +\infty \right[.$

Étape 2 : Le tableau de variations de f sur $[\, 0 ; +\infty \,[$

Le tableau de variations de la fonction f sur $[\, 0 ; +\infty \,[$ est :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) = -2e$

• $b = f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-1/2}$ (*maximum de f sur $[0; +\infty[$*)

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

1. c. c$_1$ Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Pour répondre à la question, nous allons étudier le signe de f'' sur $[0; +\infty[$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ d'après l'énoncé.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$: $f''(x) = (-4) \times (e^{-x+1}) + (-4x + 6) \times (-e^{-x+1})$

$= e^{-x+1} \times (-4 + 4x - 6)$

$= (4x - 10) \times e^{-x+1}.$

Distinguons deux cas, sachant que $e^{-x+1} > 0$ pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

1er cas: $f''(x) \leqslant 0$ ssi $4x - 10 \leqslant 0$ cad $x \in \left[\,0\,;\dfrac{5}{2}\,\right]$

2e cas: $f''(x) \geqslant 0$ ssi $4x - 10 \geqslant 0$ cad $x \in \left[\,\dfrac{5}{2}\,;+\infty\,\right[$.

En conclusion:
- f est concave sur $\left[\,0\,;\dfrac{5}{2}\,\right]$
- f est convexe sur $\left[\,\dfrac{5}{2}\,;+\infty\,\right[$.

1\. c. c$_2$. Précisons l'abscisse du point d'inflexion:

D'après le cours, si f'' s'annule et change de signe en a alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici, f'' s'annule et change de signe en: $x = \dfrac{5}{2}$.

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion: le point d'abscisse $x = \dfrac{5}{2}$.

Il s'agit en fait du point $A\left(\dfrac{5}{2}\,;f\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$.

2\. a. Déterminons les valeurs de "a" et "b" telle que F soit une primitive de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Ici, F est définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par: $F(x) = (ax + b)\,e^{-x+1}$.

Comme F est une primitive de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $F' = f$.

$F'(x) = f(x) \iff (a) \times (e^{-x+1}) + (ax + b) \times (-e^{-x+1}) = f(x)$

$\iff e^{-x+1} \times (a - ax - b) = f(x)$

$\iff e^{-x+1} \times (-ax + a - b) = (4x - 2) \times e^{-x+1}$

$\iff -ax + a - b = 4x - 2$

$$\iff \begin{cases} -a = 4 \\ a - b = -2 \end{cases}$$

$$\text{cad} \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Ainsi, F est une primitive de f sur $[\,0\,; +\infty\,[$ avec: $a = -4$ et $b = -2$.

Et pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$: $F(x) = (-4x - 2)\,e^{-x+1}$.

2. b. b₁. Déduisons-en la valeur exacte de I:

Ici: $I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,dx.$

$= \left[\,F(x)\,\right]_{\frac{3}{2}}^{8}$

$= \left[\,(-4x - 2)\,e^{-x+1}\,\right]_{\frac{3}{2}}^{8}$

$= -34e^{-7} + 8e^{-1/2}.$

La valeur exacte de I est donc: $I = -34e^{-7} + 8e^{-1/2}$.

2. b. b$_2$. Déduisons-en une valeur approchée à 10^{-2} de I:

Nous savons que: $I = -34e^{-7} + 8e^{-1/2}$.

A l'aide d'une calculatrice, nous obtenons: $I \approx 4,82$.

A 10^{-2} près, une valeur approchée de I est donc: $I \approx 4,82$.

3. a. Donnons une valeur approchée de la hauteur du point de départ D:

Le profil de la piste freestyle est donné par la courbe représentative

de la fonction f sur $\left[\frac{3}{2} ; 8\right]$.

La hauteur du point de départ correspond donc à:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4 \times \frac{3}{2} - 2\right) \times e^{-3/2+1}$$

$$= 4\, e^{-1/2}$$

$$\approx 2,426.$$

Ainsi la hauteur du point de départ est d'environ: 2, 43 mètres à 10^{-2} près.

3. b. Déterminons le nombre de bombes pour réaliser cette oeuvre:

L'objectif est de couvrir environ **75%** de la surface du mur.

Nous savons qu'une bombe aérosol de **150 ml** permet de couvrir **0, 8 m²**.

Or l'aire, en unité d'aire, est égale à: $I \approx 4,82$ m^2.

Le but du jeu est donc de couvrir $75\% \times 4,82 \approx 3,62$ m^2.

Il faudra donc " $\left(\frac{3,62}{0,8}\right)$ " bombes pour réaliser cette oeuvre soit:

5 bombes de peinture.