www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

POLYNÉSIE
2024

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$$

CORRECTION

1. a. Donnons les valeurs arrondies au centième de U_1 et U_2 :

Ici : • $U_{n+1} = U_n - \ln\left(\frac{U_n}{4}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 8$.

D'où : • $U_1 = U_0 - \ln\left(\frac{U_0}{4}\right)$

$$= 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right)$$

$$= 8 - \ln(2)$$

$$\approx 7,31$$

• $U_2 = U_1 - \ln\left(\frac{U_1}{4}\right)$

$$= (8 - \ln(2)) - \ln\left[\frac{(8 - \ln(2))}{4}\right]$$

$$\approx 6,70.$$

Ainsi : $U_1 \approx 7,31$ et $U_2 \approx 6,70$.

1. b. Que représente ce résultat ?

L'exécution de *mystere (10)* renvoie: 58.44045206721732.

mystere (10) donne la somme des premiers termes de la suite (U_n) de U_0 à U_9 cad $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9$.

1. c. Modifions la fonction afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes:

La fonction *mystere* modifiée, afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (U_n) est:

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u – log( u / 4 )
    return S/k
```


2. a. Étudions les variations de f sur $] 0 ; +\infty [$:

Ici: • $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ ($U + \ln(V)$)

• $\mathcal{D}f =] 0 ; +\infty [$.

Étape 1: Calcul de f'

La fonction f est dérivable sur $] 0 ; +\infty [$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{x}{4}}$ $\left(u' + \dfrac{v'}{v}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x-1}{x}.$$

D'où pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

Étape 2 : **Étude du signe de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$**

Comme $x > 0$, le signe de f' dépend du signe de $x - 1$.

Distinguons deux cas pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, **sachant que $x > 0$** :

- $f'(x) \leq 0$ ssi $x - 1 \leq 0$ cad $x \leq 1$ ou $x \in]\,0\,;1\,]$
- $f'(x) \geq 0$ ssi $x - 1 \geq 0$ cad $x \geq 1$ ou $x \in [\,1\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions :
- la fonction f est décroissante sur $]\,0\,;1\,]$
- la fonction f est croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

2. b. Dressons le tableau de variations de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est :

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

• $b = f(1) = 1 - \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4)$ (minimum de f sur $]0; +\infty[$)

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Le minimum de f sur $]0; +\infty[$ a pour coordonnées: $(1; 1 + \ln(4))$.

3. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$:

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$

• $U_0 = 8$

• $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$ ".

Initialisation: $1 \leqslant U_1 \leqslant U_0$?

$$\begin{cases} U_0 = 8 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 = U_0 - \ln\left(\dfrac{U_0}{4}\right) \quad \text{cad} \quad U_1 = 8 - \ln(2) \approx 7,3. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $1 \leqslant U_1 \leqslant U_0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$ et montrons qu'alors $1 \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$.

Supposons: $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: f est croissante sur $[\,1 ; +\infty\,[$.

D'où: $(1) \Rightarrow 1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \Rightarrow f(1) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(U_n)$

$\Rightarrow 1 + \ln(4) \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$

$\Rightarrow 1 \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$.

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$.**

3. b. Déduisons-en que la suite (U_n) converge vers une limite réelle " ℓ ":

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \iff \begin{cases} U_{n+1} \leqslant U_n \\ U_n \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 1 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: **la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ "**.

3. c. Résolvons $f(x) = x$:

Pour tout $x \in [\, 1 ; +\infty [$: $f(x) = x \iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x$

$$\iff -\ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\iff \frac{x}{4} = e^0$$

cad $x = 4$.

L'équation $f(x) = x$ admet donc une solution sur $[\, 1 ; +\infty [$: $x = 4$.

3. d. Déduisons-en la valeur de " ℓ ":

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in [\, 1 ; +\infty [$ telle que: $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \iff \ell - \ln\left(\frac{\ell}{4}\right) = \ell$$

cad $\ell = 4$. (d'après question précédente)

Au total, la suite (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = 4 \in [\, 1 ; +\infty [$.