BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU NORD

2023

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)\,e^{x}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. a. Déterminons la limite de la fonction g en $-\infty$:

Ici: • $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$ $\quad (3e^{u} + V)$

• $\mathcal{D}g = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 3e^{2x} - 2x - 3.$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 3 \times (0) - 2 \times (-\infty) - 3 = +\infty$.

1. b. Déterminons la limite de la fonction g en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction g peut s'écrire: $g(x) = e^{2x} \times \left[3 - \dfrac{2x}{e^{2x}} - \dfrac{3}{e^{2x}} \right]$.

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} \times \left[3 - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{3}{e^{2x}}\right]$.

Or d'après le cours:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$ (Croissances Comparées)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \times [3 - 2 \times 0 - 3 \times 0] = +\infty$.

2. a. Montrons que pour tout $x \in IR$, $g'(x) = 6e^{2x} - 2$:

La fonction g est dérivable sur IR, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $g'(x) = 3 \times (2e^{2x}) - 2$ $(3U'e^U + V')$

$= 6e^{2x} - 2$.

Ainsi pour tout $x \in IR$: $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.

2. b Étudions le signe de la fonction g' sur IR:

Distinguons deux cas pour tout $x \in IR$.

1er cas: $g'(x) \leqslant 0$.

$g'(x) \leqslant 0 \iff 6e^{2x} - 2 \leqslant 0 \iff e^{2x} \leqslant \frac{1}{3}$

cad $x \leqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2}$ ou $x \leqslant \frac{-\ln(3)}{2}$ ou $x \in \left]-\infty ; \frac{-\ln(3)}{2}\right]$.

2^e cas: $g'(x) \geqslant 0$.

$g'(x) \geqslant 0 \iff 6e^{2x} - 2 \geqslant 0 \iff e^{2x} \geqslant \frac{1}{3}$

cad $x \geqslant \frac{-\ln(3)}{2}$ ou $x \in \left[\frac{-\ln(3)}{2} ; +\infty\right[$.

Ainsi: • g est décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{-\ln(3)}{2}\right]$,

• g est croissante sur $\left[\frac{-\ln(3)}{2} ; +\infty\right[$.

2. c. Déduisons-en le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

Le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est:

x	$-\infty$		$\frac{-\ln(3)}{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = +\infty$

• $b = g\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) = 3 \times e^{2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times \ln(3)} - 2 \times \left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) - 3$

$$= 3 \times \frac{1}{3} + \ln(3) - 3$$

$$= \ln(3) - 2 \qquad (\text{minimum de } g \text{ sur } \mathbb{R})$$

- $c = +\infty$.

3. a. Montrons que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$:

Nous avons: $g(0) = 3 \times e^{(2 \times 0)} - 2 \times 0 - 3$

$= 0$.

Ainsi: $x = 0$ est bien solution de l'équation $g(x) = 0$.

3. b. Montrons que $g(x) = 0$ admet une seconde solution non nulle α:

Préalablement notons que: la première solution appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\ln(3)}{2}; +\infty\right[$, et par conséquent la seconde solution appartiendra à l'intervalle $\left]-\infty; \frac{-\ln(3)}{2}\right[$.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ $(a < b)$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • g est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left]-\infty; \frac{-\ln(3)}{2}\right[$,

- " k = 0 " est compris entre: $g\left(\frac{-\ln(3)}{2}\right) = \ln(3) - 2 < 0$

  et: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty > 0$,

- g est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{-\ln(3)}{2}\right[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $\left]-\infty ; \frac{-\ln(3)}{2}\right[$.

3\. c. Donnons un encadrement à 10^{-2} près de α:

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons comme encadrement à 10^{-2} près pour α: $-1,5 < \alpha < -1,4$.

4\. Déduisons-en le signe de la fonction g sur IR:

Des questions précédentes, nous pouvons déduire le signe de la fonction g via le tableau suivant:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
g		+	0	-	0	+	

PARTIE B

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x \times g(x)$:

Ici: • $f(x) = e^{3x} - (2x + 1)\,e^x$ $\quad (e^U - V \times e^W)$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3e^{3x} - [\, 2 \times e^x + (2x + 1) \times e^x]$

$$(U'e^U - [\, V' \times e^W + V \times W'e^W)$$

$$= e^x \times (3e^{2x} - 2 - 2x - 1)$$

$$= e^x \times (3e^{2x} - 2x - 3)$$

$$= e^x \times g(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $f'(x) = e^x \times g(x)$.

2. a. Déduisons-en le signe de la fonction f':

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$: le signe de f' est le même que celui de la fonction $g(x)$.

Ainsi, d'après Partie A 4., nous avons donc:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. b. Dressons le tableau de variations de f sur IR:

Le tableau de variations de la fonction f sur IR est:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c	$\nearrow$	d

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

• $b = f(\alpha) = e^{3\alpha} - (2\alpha + 1)\, e^{\alpha}$

• $c = f(0) = 0$

• $d = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pourquoi f n'est pas convexe sur IR ?

La fonction f ne peut pas être convexe sur IR car pour l'être, il faudrait que: $f'(x)$ soit croissante sur IR, ce qui n'est pas le cas ici.