

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Récurrance, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Résolvons dans \mathbb{R} , l'équation $f(x) = x$:

Sur \mathbb{R} , f est définie par: $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

Dans ces conditions: $f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = e^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0.$$

La solution dans \mathbb{R} , de l'équation $f(x) = x$, est: $x = 0$.

2. Justifions tous les éléments du tableau:

a. Montrons que f est croissante sur \mathbb{R} :

Pour cela nous devons calculer la dérivée de f sur \mathbb{R} .

Posons: $f = g_1 - \ln(g_2)$,

avec: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = x^2 + 1$.

Les fonctions g_1 et g_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes.

De plus, sur \mathbb{R} : $g_2(x) > 0$.

Donc la fonction " $-\ln(g_2)$ " est dérivable sur \mathbb{R} , comme composée.

Enfin, f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} : $g_1 + -\ln(g_2)$.

Dans ces conditions, f est dérivable sur \mathbb{R} et nous pouvons calculer f' sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$\text{Au total: } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) = 0$ ssi: $x = 1$.
- $f'(x) > 0$ ssi: $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que f est croissante sur \mathbb{R} .

$$b. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ?$$

$$\text{Nous avons: } \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty. \quad (2)$$

$$\text{Ainsi, nous pouvons affirmer que: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (1) + (2)$$

3. Montrons que pour tout réel x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$:

D'après la question 2., nous savons que f est croissante.

Ainsi, nous pouvons écrire:

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

Or: $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2)$.

D'où: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 - \ln(2)$

cad: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$. (car $1 - \ln(2) < 1$)

Au total: pour tout réel $x \in [0; 1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

4. a. Que fait cet algorithme ?

Cet algorithme indique la plus petite valeur de N pour laquelle $N - \ln(N^2 + 1)$ est supérieur ou égal à N .

4. b. Déterminons la valeur de N si $A = 100$:

Lorsque la valeur saisie pour A est 100, l'algorithme fourni comme valeur de N : $N = 110$.

Au total: $N = 110$.

Partie B:

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $U_n \in [0; 1]$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 1$
- $U_{n+1} = U_n - \ln(U_n^2 + 1)$.

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $0 \leq U_n \leq 1$."
($U_n \in [0; 1]$)

Initialisation: • $0 \leq U_0 = 1 \leq 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $0 \leq U_1 \leq 1$?

$$U_1 = U_0 - \ln(U_0^2 + 1) \Rightarrow U_1 = 1 - \ln(2).$$

Comme $0 \leq 1 - \ln(2) \leq 1$, vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq 1$
et montrons qu'alors: $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

Supposons: $0 \leq U_n \leq 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Comme f est croissante sur \mathbb{R} , donc sur \mathbb{N} , nous pouvons écrire:

$$(1) \Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1 - \ln(2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons:

$$0 \leq U_n \leq 1 \text{ cad: } U_n \in [0; 1].$$

2. Étudions les variations de la suite (U_n) :

Nous devons ici déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = U_n - \ln(U_n^2 + 1) - U_n \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = -\ln(U_n^2 + 1).$$

Or, nous savons que: $0 \leq U_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq U_n^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq U_n^2 + 1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) \leq \ln(U_n^2 + 1) \leq \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \ln(U_n^2 + 1) \leq \ln(2).$$

Donc: $\ln(U_n^2 + 1) \geq 0 \Rightarrow -\ln(U_n^2 + 1) \leq 0$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

En conclusion, la suite (U_n) est décroissante sur \mathbb{N} .

3. Montrons que la suite (U_n) est convergente:

Nous savons que:

- $0 \leq U_n \leq 1$.

Donc (U_n) est minorée par $m = 0$.

- $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

Donc (U_n) est décroissante.

Dans ces conditions, (U_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

4. Déduisons-en la valeur de L :

Soit " L " la limite de la suite (U_n) .

" L " est unique et est telle que: $f(L) = L$.

$$f(L) = L \Leftrightarrow L = L - \ln(L^2 + 1)$$

$$\Rightarrow L = 0 \text{ (voir Partie A, question 1.)}$$

Au total, la valeur de L est: $L = 0$.