Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 6

CORRECTION

1. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_n + V_n + W_n = 1$:

D'après le cours, nous savons que la somme des probabilités est égal à 1.

Donc ici: $P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$

cad: $U_n + V_n + W_n = 1$.

Au total, pour tout entier naturel n: $U_n + V_n + W_n = 1$.

2. a. Déterminons la formule, saisie dans la cellule C_3, qui permet de calculer les termes de la suite (V_n):

D'après l'énoncé:
- $V_0 = 0$,
- $V_{n+1} = 0,65 \times V_n + 0,05 \times U_n$.

Ainsi, la formule demandée est: << $= 0,65 * C_2 + 0,05 * B_2$ >>.

En effet: $C_3 = 0,65 \times 0 + 0,05 \times 1$.

2. b. Déterminons la valeur du pic épidémique prévue par le modèle:

L'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande est atteinte quand: $n = 4$.

Le pic d'épidémique a donc pour valeur: $V_4 = 0,0859$.

Freemaths : Tous droits réservés

3. a. • Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,85\ U_n$:

D'après l'énoncé: " Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine n+1, 85% restent de type S . . . ".

Dans ces conditions: $P(S_{n+1}) = 0,85 \times P(S_n)$.

Ce qui revient à écrire: $U_{n+1} = 0,85 \times U_n$, pour tout entier naturel n.

• Déduisons-en U_n en fonction de n:

Comme $U_{n+1} = 0,85 \times U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = U_0 \times (0,85)^n, \text{ avec: } U_0 = 1.$$

Au total, pour tout entier naturel n: $U_n = (0,85)^n$.

3. b. Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$:

Nous allons montrer par récurrence que:

$$\text{" pour tout entier naturel } n: \quad V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n) \text{ ".}$$

Initialisation: • $V_0 = \frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0)$?

oui car: $V_0 = 0$ et $\frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0) = 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $V_1 = \frac{1}{4}(0,85^1 - 0,65^1)$?

oui car: $V_1 = 0,05$ et $\frac{1}{4}(0,85^1 - 0,65^1) = 0,05$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Freemaths : Tous droits réservés

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$

et montrons qu'alors: $V_{n+1} = \frac{1}{4}(0,85^{(n+1)} - 0,65^{(n+1)})$.

Supposons: $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow 0,65\, V_n = 0,65 \times \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$$

$$\Rightarrow 0,65\, V_n = \frac{1}{4}(0,65 \times (0,85)^n - (0,65)^{n+1})$$

$$\Rightarrow 0,65\, V_n + 0,05\, U_n = \frac{1}{4}(0,65 \times (0,85)^n - (0,65)^{n+1}) + 0,05\, U_n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{4}(0,65 \times (0,85)^n - (0,65)^{n+1}) + 0,05 \times (0,85)^n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{4}(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}) \quad \text{car} \quad 0,05 = \frac{1}{4}(0,2).$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

4. a. Calculons les limites des suites (U_n), (V_n) et (W_n):

- $$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} (0,85)^n$$

  $$= 0 \quad \text{car:} \quad 0,85 \in \,]0, 1[.$$

- $$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$$

  $$= 0 \quad \text{car:} \quad 0,85 \in \,]0, 1[\text{ et } 0,65 \in \,]0, 1[.$$

- $$\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - U_n - V_n$$

Freemaths : Tous droits réservés

$= 1$ car : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0.$

Ainsi, les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et convergent vers " 0 ".

Quant à la suite (W_n) elle est convergente et converge vers " 1 ".

4. b. Que peut-on déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 1$, nous pouvons affirmer qu'à long terme tous les individus seront immunisés contre l'épidémie.

Freemaths : Tous droits réservés