Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 5

CORRECTION

1. Justifions que $U_1 = 2926$:

Il s'agit de calculer U_1.

U_1 est tel que: $U_1 = (1 - 5\%) \times (U_0 + 80)$

<=> $U_1 = 0,95 \times (U_0 + 80)$

<=> $U_1 = 0,95 \times (3000 + 80)$

=> $U_1 = 2926$ cétacés.

Au total: le nombre de cétacés au 1er juin est de 2926.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,95\ U_n + 76$:

• D'après l'énoncé, le nombre de cétacés au 1er juin 2017 est de **3000**.

D'où: $U_0 = 3000$ cétacés.

• De plus, chaque année, 80 cétacés arrivent **(entre le 1er juin et le 31 octobre)** dans la réserve marine et cette dernière subit une baisse de 5% de son effectif total **(entre le 1er novembre et le 31 mai)**.

Soient: • U_{n+1}, le nombre de cétacés au 1er juin de l'année 2017 + (n+1),

• U_n, le nombre de cétacés au 1er juin de l'année 2017 + (n).

Pour tout entier naturel n, le nombre de cétacés U_{n+1} est:

$$U_{n+1} = (1 - 5\%) \times (U_n + 80)$$

$$= 0,95 \times (U_n + 80)$$

$$= 0,95\ U_n + 76.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons bien: $U_{n+1} = 0,95\ U_n + 76$.

3. Déterminons la formule demandée:

La formule à entrer dans la cellule C_2 est:

- En C_2: on entre << = (B_2 + 80) * 0,95 >>.

4. a. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_n \geqslant 1520$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant 1520$ ".

Initialisation: • $U_0 \geqslant 1520$?

oui car: $U_0 = 3000 \geqslant 1520$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \geqslant 1520$
et montrons qu'alors $U_{n+1} \geqslant 1520$.

Supposons: $\underbrace{U_n \geqslant 1520}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

$$(1) \implies 0,95 \times U_n \geqslant 0,95 \times 1520$$

$$\implies 0,95 \times U_n \geqslant 1444$$

$\Rightarrow \; 0,95 \times U_n + 76 \geq 1520$

$\Rightarrow \; U_{n+1} \geq 1520.$

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1520$.

4. b. Démontrons que la suite (U_n) est décroissante:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$U_{n+1} - U_n = (0,95\, U_n + 76) - U_n$

$= -\,0,05\, U_n + 76.$

Or, pour tout entier naturel n: $U_n \geq 1520$.

Dans ces conditions: $-\,U_n \leq -1520$

$\Leftrightarrow \; -\,0,05\, U_n \leq -\,76$

$\Leftrightarrow \; -\,0,05\, U_n + 76 \leq 0$

$\Leftrightarrow \; U_{n+1} - U_n \leq 0.$

Au total: la suite (U_n) est décroissante car $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

4. c. Justifions que la suite (U_n) est convergente:

D'après le cours, nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- $U_{n+1} - U_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Donc la suite (U_n) est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $U_n \geq 1520$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (U_n) est minorée par $m = 1520$.

Dans ces conditions: la suite (U_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme:

$V_n = U_n - 1520 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 1520$

$\iff V_{n+1} = (0,95\,U_n + 76) - 1520 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 1520 \Rightarrow V_0 = 1480$ et $U_n = V_n + 1520.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,95\,[V_n + 1520] + 76) - 1520$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,95\,V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $V_0 = 1480.$

5. b. Déduisons-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$:

Nous savons que: * $V_n = 1480 \times (0,95)^n$ (d'après le cours)

* $U_n = V_n + 1520.$

D'où: $U_n = 1480 \times (0,95^n) + 1520.$

5. c. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1480 \times (0,95)^n + 1520$

$= 1520$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,95)^n = 0$, car: $0,95 \in \,]0;1[.$

Au total: la limite de la suite (U_n) est égale à 1520 cétacés et donc la suite (U_n) converge vers 1520 cétacés.

6. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que  u ⩾ 2000
    | n ← n + 1
    | u ← 0,95 x u + 76
Fin de Tant que
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminons l'année de fermeture:

• Oui, la réserve marine fermera un jour car comme nous l'avons vu:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1520 \leqslant 2000 \text{ cétacés.}$$

• L'année de fermeture sera: l'année 2039.

En effet: $U_n \leqslant 2000 \iff 1480 \times (0,95)^n + 1520 \leqslant 2000$

$$\iff 1480 \times (0,95)^n \leqslant 480$$

$$\iff (0,95)^n \leqslant \frac{48}{148}$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \times \ln(0,95) \leqslant \ln\left(\frac{48}{148}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{48}{148}\right)}{\ln(0,95)},$$

car: $0,95 \in \,]0\,;1[$, et donc: $\ln(0,95) < 0$,

$\Longrightarrow$ $n \geqslant 22$ ans, car n est un entier naturel.

En conclusion: la réserve marine fermera en 2017 + 22 années cad en **2039**.