Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 19

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction φ:

Ici: • $\varphi(x) = e^{x-1} - \frac{1}{2} - x$.

• $D\varphi = [\ 1 ; +\infty\ [$.

Nous pouvons alors écrire: $\varphi(x) = e^{x-1} \times \left[1 - \frac{1}{2\ e^{x-1}} - \frac{x}{e^{x-1}} \right]$.

Or, d'après le Théorème des Croissances Comparées: " En $+\infty$, exponentielle croît plus vite que polynôme qui croît plus vite que logarithmique ".

D'où: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2\ e^{x-1}} = 0$,

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = 0$.

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{x-1} (1 - 0 - 0)$

$= +\infty$.

2. Déterminons le sens de variation de φ sur $[\ 1 ; +\infty\ [$:

• **Calcul de φ':**

Posons: $\varphi = f_1 + f_2$, avec: $f_1(x) = e^{x-1}$ et $f_2(x) = -x - \frac{1}{2}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Donc, φ est dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$ comme somme $(f_1 + f_2)$ de 2 fonctions dérivables sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Ainsi, nous pouvons calculer φ' pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$.

Pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$: $\varphi'(x) = e^{x-1} - 1$.

• **Tableau de variation de φ:**

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$.

• **1^{er} cas**: $\varphi'(x) = 0$.

$\varphi'(x) = 0 \iff e^{x-1} = e^0 \implies x = 1$.

• **$2^{ème}$ cas**: $\varphi'(x) < 0$.

$\varphi'(x) < 0 \iff e^{x-1} < e^0 \implies x < 1$. **(cas à rejeter car: $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$)**

• **$3^{ème}$ cas**: $\varphi'(x) > 0$.

$\varphi'(x) > 0 \iff e^{x-1} > e^0 \implies x > 1$ ou $x \in]\ 1 ; +\infty\ [$.

Ainsi: • φ est croissante sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

• φ est strictement croissante sur $]\ 1 ; +\infty\ [$.

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	1		$+\infty$
φ'	0	$+$	
φ	a	$\nearrow$	b

Avec: • $a = \varphi(1) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$,

• $b = +\infty$, avec: $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

3. Déduisons que l'équation $C(x) = x$ admet une unique solution α:

Notons que: $C(x) = x \iff C(x) - x = 0 \iff \boldsymbol{\varphi(x) = 0}$.

Nous allons appliquer le **COROLLAIRE DU TVI** pour répondre à cette question.

Ici: • φ est continue sur $[1; +\infty[$.

• " **0** " de l'équation $\varphi(x) = \mathbf{0}$ est compris entre: $\varphi(a) = \varphi(1) = -\frac{1}{2}$

et: $\varphi(b) = \varphi(+\infty) = +\infty$.

• φ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Ainsi, d'après le **COROLLAIRE DU TVI**, nous pouvons affirmer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à $]1; +\infty[$.

Au total: $C(x) = x$ cad $\varphi(x) = 0$ admet exactement une unique solution α.

4. Montrons que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$:

Nous avons: • $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$ => $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \approx -0,351 < 0$,

• $\varphi(2) = e - \frac{1}{2} - 2$ => $\varphi(2) \approx 0,218 > 0$.

Ainsi: $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0 < \varphi(2)$

<=> $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi(2)$

=> $\frac{3}{2} < \alpha < 2$, car: φ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Au total, nous avons bien: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

Partie B:

1. Montrons que $C(x) = x$ <=> $g(x) = x$:

$\forall\, x \in I$: $C(x) = x$ <=> $e^{x-1} = \frac{1}{2} + x$

<=> $x - 1 = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$, avec: $x + \frac{1}{2} > 0$

car: $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

<=> $\ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1 = x$

<=> $g(x) = x$.

Au total, pour tout $x \in I$: $C(x) = x$ <=> $g(x) = x$.

2. a. a1. Justifions que g est croissante sur I:

Ici: • $g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1$

- $Dg = \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$.

Pour tout $x \in \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$: $g'(x) = \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}}$

=> $g'(x) = \dfrac{2}{2x + 1}$, avec : $x \neq -\frac{1}{2}$, car : $x \in \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$.

Or sur $\left[\frac{3}{2} ; 2\right]$: $g'(x) > 0$.

Donc sur I : g est strictement croissante.

2. a. a2. Déduisons que pour tout réel $x \in I$, $g(x) \in I$:

Comme la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2} ; 2\right]$, elle prendra ses valeurs dans l'intervalle $J = g(I)$ cad : $J = \left[g\left(\frac{3}{2}\right) ; g(2)\right]$.

Or : • $g\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(2) + 1$ => $g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,693$

• $g(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) + 1$ => $g(2) \approx 1,916$.

Au total : $J = [\,1,693 \,;\, 1,916\,] \in I$, et par conséquent : $g(x) \in I$.

2. b. Montrons que, pour tout $x \in I$, $0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$:

$x \in I$ <=> $x \in \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$

<=> $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$

$$\iff 2 \times \frac{3}{2} \leq 2x \leq 2 \times 2$$

$$\iff \left(2 \times \frac{3}{2}\right) + 1 \leq 2x + 1 \leq (2 \times 2) + 1$$

$$\iff 4 \leq 2x + 1 \leq 5$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{2}{2x+1} \leq \frac{2}{4} \quad \text{cad:} \quad \frac{2}{5} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Or: $\frac{2}{5} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Au total: pour tout $x \in I$, $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

3. a. Montrons l'inéquation (1):

Nous avons, pour tout $x \in I$: $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$ (a), d'après l'énoncé.

Or: • $C(x) = x$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$, avec: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

• $C(x) = x \iff g(x) = x$, pour tout $x \in I$.

Dans ces conditions, il existe une unique solution $\alpha \in I$ avec: $g(\alpha) = \alpha$.

D'où $\forall x \in I$: (a) $\Rightarrow |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

$$\iff |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|.$$

Au total, pour tout $x \in I$, nous avons bien: $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$.

3. b. Calculons ω_2 et ω_3:

Nous avons: • $\omega_0 = \frac{3}{2}$,

• $\omega_1 \approx 1,693$.

D'où: • $\omega_2 \approx 1,785$,

• $\omega_3 \approx 1,827$.

Au total, nous avons: $\omega_2 \approx 1,785$ et $\omega_3 \approx 1,827$.

3. c. Montrons par récurrence l'inégalité demandée, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

Préalablement, notons deux résultats: • $\forall\, x \in [\,1\,;+\infty\,[,\ \frac{3}{2} < \alpha < 2$.

• $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\,;2\right],\ |\,g(x) - \alpha\,| \leqslant \frac{1}{2}\,|\,x - \alpha\,|$.

Nous allons montrer par récurrence que: " $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\,\omega_n - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ".

Initialisation: • $\omega_0 = \frac{3}{2}$.

• $\left|\frac{3}{2} - \alpha\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$? cad: $\left|\frac{3}{2} - \alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}$?

oui car: $\alpha \in \left]\frac{3}{2}\,;2\right[$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\,\omega_n - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

et montrons qu'alors: $|\,\omega_{n+1} - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

Supposons: $|\,\omega_n - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} \times |\omega_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow |g(\omega_n) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |\omega_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\Rightarrow |g(\omega_n) - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\Rightarrow |\omega_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.$$

Conclusion: $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\omega_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$

3. d. Déduisons-en que la suite (ω_n) est convergente et déterminons sa limite:

- La suite (ω_n) est croissante et est majorée, elle est donc convergente.

- De plus: $|\omega_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \iff -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant \omega_n - \alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$

Or:
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, car: $\frac{1}{2} \in]0;1[$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, car: $\frac{1}{2} \in]0;1[$.

Dans ces conditions, d'après le **théorème des gendarmes**, nous pouvons affirmer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n - \alpha = 0$ ce qui revient à dire que: $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n = \alpha$.

Au total, la suite (ω_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente et converge vers $L = \alpha$.