Spé Maths
Terminale

Géométrie dans l'espace

MINI COURS

A. Les vecteurs :

1. Coordonnées, milieu, gravité, colinéarité :

Soient A $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$, B $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, C $(x_C\,;\,y_C\,;\,z_C)$, 3 points de l'espace :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A)$.

- Le milieu I du segment [AB] est : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

- Le centre de gravité G du triangle ABC est :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,;\,\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\,;\,\frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ssi :

il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. Vecteurs coplanaires :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non colinéaires.

Soit $\vec{w}$ un vecteur ; $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi :

il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$.

B. Produit scalaire & distance :

1. Produit scalaire :

Soient $\vec{u}\ (x\,;\ y\,;\ z)$ et $\vec{v}\ (x'\,;\ y'\,;\ z')$, deux vecteurs de l'espace :

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x \cdot x') + (y \cdot y') + (z \cdot z')$.

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + z^2 + z^2}$.

2. Distance :

Soient $A\ (x_A\,;\ y_A\,;\ z_A)$ et $B\ (x_B\,;\ y_B\,;\ z_B)$, 2 points de l'espace :

La distance de A à B est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

3. Propriétés du produit scalaire :

- $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{v} \,.\, \vec{u}$

- $(\vec{u} + \vec{v}) \,.\, \vec{w} = \vec{u} \,.\, \vec{w} + \vec{v} \,.\, \vec{w}$

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \,.\, \vec{u} \,.\, \vec{v}$

- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \,.\, \vec{u} \,.\, \vec{v}$.

C. Vecteurs orthogonaux, angle :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou perpendiculaires ssi : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- Soit θ, l'angle entre 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

D. Droites de l'espace :

1. Droites parallèles, orthogonales :

Soient D une droite de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{o}$ et D' une droite de vecteur directeur $\vec{u}' \neq \vec{o}$:

- D et D' sont parallèles ssi : $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.
- D et D' sont orthogonales ssi : $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux.

2. Représentation paramétrique d'une droite :

- Soit A $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ $(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

E. Plans de l'espace :

1. Vecteur normal à un plan P :

Un vecteur $\vec{n}$ $(a\,;\,b\,;\,c)$ est normal à un plan P ssi :

ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

2. Équation cartésienne :

Une équation cartésienne d'un plan défini par un point A (x_A ; y_A ; z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

3. A savoir absolument :

☛ Soient P un plan dirigé par les vecteurs non colinéaires ($\vec{u}$; $\vec{v}$), une droite D de vecteur directeur $\vec{w}$, et $\vec{n}$ un vecteur normal de P.

- P et D sont parallèles ssi : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
- P et D sont perpendiculaires ssi : $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- P et D sont parallèles ssi : $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
- P et D sont perpendiculaires ssi : $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

☛ Soient P et P' deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

- P et P' sont parallèles ssi : $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- P et P' sont perpendiculaires ssi : $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.