www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

ASIE

2024

S, S' & COS (α)

CORRECTION

PARTIE A

1. Vérifions que les points A, B et C appartiennent au plan $\mathcal{P}$:

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x + 2y - 3z + 1 = 0$. **(1)**

Les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-4\\-6\\5\end{pmatrix}$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$

ssi leurs coordonnées vérifient l'équation **(1)**.

Nous avons :

- $2x_A + 2y_A - 3z_A + 1 = 2 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \times 1 + 1 = 0$
- $2x_B + 2y_B - 3z_B + 1 = 2 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 1 + 1 = 0$
- $2x_C + 2y_C - 3z_C + 1 = 2 \times (-4) + 2 \times (-6) - 3 \times 5 + 1 = -34 \neq 0$.

Seuls les points A et B appartiennent donc au plan $\mathcal{P}$.

2. Montrons que le point C' (0 ; -2 ; -1) est le projeté orthogonal du point C sur $\mathcal{P}$:

Le point C' est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$ ssi:

→ $C' \in \mathcal{P}$

→ $\overrightarrow{CC'}$ et le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ au plan $\mathcal{P}$ sont colinéaires.

Étape 1: Montrons que C' appartient au plan $\mathcal{P}$

$C' \in \mathcal{P}$ ssi: $2x_{C'} + 2y_{C'} - 3z_{C'} + 1 = 0$.

Or: $2x_{C'} + 2y_{C'} - 3z_{C'} + 1 = 2 \times 0 + 2 \times (-2) - 3 \times (-1) + 1 = 0$.

Donc: $C' \in \mathcal{P}$.

Étape 2: Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

Nous avons: • $\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ -2+6 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

• $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc: $\overrightarrow{CC'} = 2 \times \vec{n}$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\vec{n}$ sont bien colinéaires.

Au total, le point C' est bien le projeté orthogonal du point C sur $\mathcal{P}$.

3. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AB):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (AB) passe par le point A (1 ; 0 ; 1)

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AB) est $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

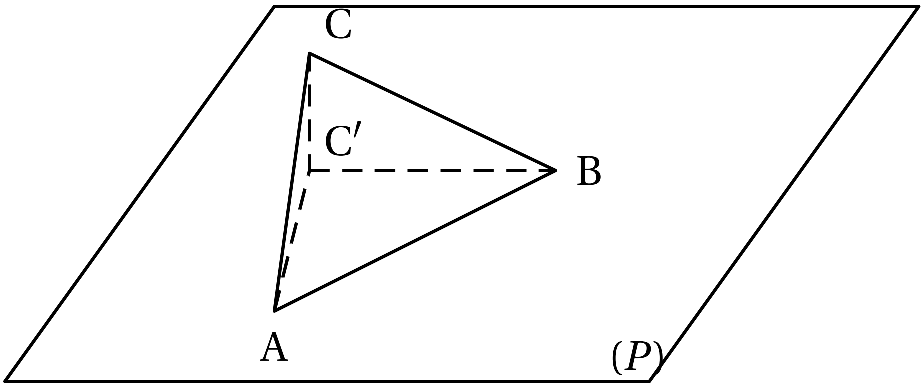
D'où une représentation paramétrique de la droite (AB) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(1; -1; 0)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 1 \times t \\ y = 0 + (-1) \times t \\ z = 1 + 0 \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. Déterminons les coordonnées du point H:



→ H ∈ (AB), il existe donc un t' ∈ IR tel que: $\begin{cases} x_H = 1 + t' \\ y_H = -t' \\ z_H = 1 \end{cases}$.

→ (AB) ⊥ (HC), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 - x_H \\ -6 - y_H \\ 5 - z_H \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff [\, 1 \times (-4 - x_H)\,] + [\, (-1) \times (-6 - y_H)\,] + [\, 0 \times (5 - z_H)\,] = 0$$

$$\iff -4 - x_H + 6 + y_H = 0$$

$$\iff -4 - (1 + t') + 6 + (-t') = 0$$

cad $t' = \frac{1}{2}$.

Ainsi les coordonnées du point H sont: • $x_H = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

- $y_H = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

- $z_H = 1 = 1.$

PARTIE B

1. Calculons la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$:

$$\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} -4-\frac{3}{2} \\ -6+\frac{1}{2} \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions: $\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2}$

$$= \sqrt{\frac{153}{2}}.$$

Ainsi, la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$ est: $\sqrt{\frac{153}{2}}.$

2. Déterminons la valeur exacte de " S ":

Soit S l'aire du triangle ABC: $S = \mathcal{A}(ABC) = \frac{\text{base x hauteur}}{2}.$

D'où ici: $S = \mathcal{A}(ABC)$

$$= \frac{AB \times CH}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{153}}{2}.$$

Ainsi, la valeur exacte de S est: $S = \mathcal{A}(ABC) = \frac{\sqrt{153}}{2}.$

PARTIE C

1. Déterminons la valeur de cos (α): $\left(\frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse du triangle}} \right)$

Nous savons que: $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$ et $\alpha = \widehat{CHC'}$.

Notons que le triangle CHC' est **rectangle en C'**.

Dans ces conditions: $\cos(\alpha) = \frac{C'H}{CH} = \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\sqrt{\frac{153}{2}}} = \frac{1}{3}.$

2. a. Montrons que les droites (C'H) et (AB) sont perpendiculaires:

Les droites (C'H) et (AB) sont perpendiculaires ssi: $\overrightarrow{C'H} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Or: $$\overrightarrow{C'H} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 0 \\ -\frac{1}{2} + 2 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{3}{2} \times 1 \right) + \left(\frac{3}{2} \times (-1) \right) + (2 \times 0)$$

$$= 0.$$

Donc nous pouvons affirmer que: les droites (C'H) et (AB) sont bien perpendiculaires.

2. b. Calculons la valeur exacte de " S' ":

Soit S' l'aire du triangle ABC': $S' = \mathcal{A} (ABC') = \frac{\text{base x hauteur}}{2}$.

D'où ici: $S' = \mathcal{A} (ABC')$

$$= \frac{AB \times C'H}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Ainsi, la valeur exacte de S' est: $S' = \mathcal{A}(ABC') = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

2. c. Donnons une relation entre " S ", " S' " et cos (α):

Nous avons vu que: $\cos(\alpha) = \frac{C'H}{CH}$.

D'où $\cos(\alpha) = \dfrac{\dfrac{(AB \times C'H)}{2}}{\dfrac{AB \times CH}{2}} = \dfrac{S'}{S}$.

Une relation entre S, S' et cos (α) est donc: $\cos(\alpha) = \frac{S'}{S}$.