BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

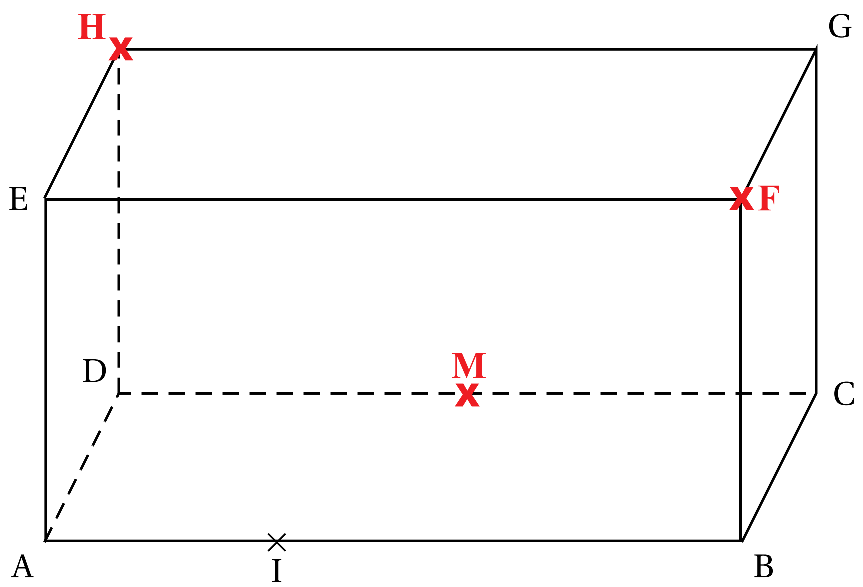
AMÉRIQUE DU NORD
2024

LE PAVÉ DROIT ABCDEFGH

CORRECTION

1. Donnons les coordonnées des points F, H et M:

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et à l'aide du graphique, les coordonnées des points F, H et M sont:



- $F(3; 0; 1)$
- $H(0; 1; 1)$
- $M\left(\dfrac{3}{2}; 1; 0\right)$.

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi, les coordonnées des points F, H et M sont les suivantes:

$$F\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } M\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. a. Montrons que $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF):

Étape 1: on montre que H, M et F définissent un plan

D'après le cours, les points H, M et F définissent un plan **ssi les vecteurs** $\overrightarrow{HF}$ **et** $\overrightarrow{MF}$ **ne sont pas colinéaires.**

Or: • $\overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} 3-\frac{3}{2} \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Comme $y_{\overrightarrow{HF}} = y_{\overrightarrow{MF}}$ et $z_{\overrightarrow{HF}} \neq z_{\overrightarrow{MF}}$, les vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{MF}$ ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Les points H, M et F ne sont donc pas alignés.

Donc les points H, M et F définissent un plan noté (HMF).

Freemaths : Tous droits réservés

Étape 2: $\vec{n}$ est-il normal au plan (HMF) ?

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (HMF) ssi ce vecteur est orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires du plan (HMF).

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{HF} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{HF} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{MF} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{MF} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HF} = 2 \times 3 + 6 \times (-1) + 3 \times 0 = 0$

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MF} = 2 \times \frac{3}{2} + 6 \times (-1) + 3 \times 1 = 0.$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HF}$ et à $\overrightarrow{MF}$, il est normal au plan (HMF).

2. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (HMF):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A (x_A ; y_A ; z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

• le point H ∈ (HMF), avec $H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_H) + b(y - y_H) + c(z - z_H) = 0$

$$\iff 2 \times (x - 0) + 6 \times (y - 1) + 3 \times (z - 1) = 0$$

cad $2x + 6y + 3z - 9 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (HMF) est donc: $2x + 6y + 3z - 9 = 0$.

2. c. Le plan $\mathcal{P}$ est-il parallèle au plan (HMF) ?

Nous savons:
- une équation cartésienne de (HMF) est $2x + 6y + 3z - 9 = 0$
- une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$.

Dans ces conditions:
- le plan (HMF) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
- le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Comme $z_{\vec{w}} = -z_{\vec{n}}$ et $x_{\vec{w}} \neq -x_{\vec{n}}$, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{w}$ n'étant pas colinéaires, nous pouvons affirmer que: les plans (HMF) et $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles.

3. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (DG):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace

Freemaths : Tous droits réservés

- Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (DG) passe par le point D (0 ; 1 ; 0)

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D est $\vec{u} = \overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (DG) passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (3 ; 0 ; 1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + 3 \times t \\ y = 1 + 0 \times t \\ z = 0 + 1 \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (DG) est donc:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. Déterminons les coordonnées du point N:

N est le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).

Freemaths : Tous droits réservés

Les coordonnées du point **N** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_N = 3t & (1) \\ y_N = 1 & (2) \\ z_N = t & (3) \\ 2x_N + 6y_N + 3z_N - 9 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations **(1)**, **(2)** et **(3)**, nous pouvons écrire:

$$(4) \iff 2x_N + 6y_N + 3z_N - 9 = 0 \iff 2 \times 3t + 6 \times 1 + 3 \times t - 9 = 0$$

$$\text{cad } t = \frac{1}{3}.$$

Les coordonnées du point **N** sont donc:

- $x_N = 1$
- $y_N = 1$
- $z_N = \frac{1}{3}$.

5. Le point $R\left(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur (HMF) ?

Non car: les vecteurs $\overrightarrow{GR}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires !!!

Freemaths : Tous droits réservés