www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

CENTRES ÉTRANGERS 1

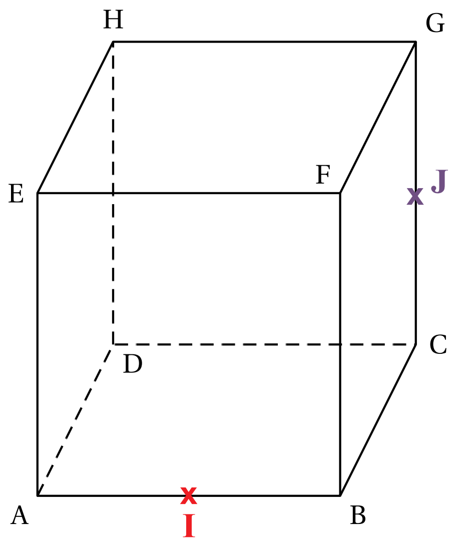
2024

CUBE & PYRAMIDE

CORRECTION

1. Donnons les coordonnées des points I et J :

Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et à l'aide du graphique, les coordonnées des points I et J sont :



- $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$ car $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AD} + 0 \times \overrightarrow{AE}$

- $J\left(1 ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$ car $\overrightarrow{AJ} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{CG}$

$$= 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AE}.$$

Ainsi, les coordonnées des points I et J sont : $I\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI) :

Étape 1 : Détermination des coordonnées des points E, F et H

Dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$), nous avons :

- E (0 ; 0 ; 1)
- F (1 ; 0 ; 1)
- H (0 ; 1 ; 1).

Étape 2 : On montre que F, H et I définissent un plan

D'après le cours, les points F, H et I définissent un plan ssi **les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FI}$ ne sont pas colinéaires.**

Or :

- $\overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{FI} = \begin{pmatrix} 1/2-1 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $x_{\overrightarrow{FH}} = 2 \times x_{\overrightarrow{FI}}$ et $y_{\overrightarrow{FH}} \neq 2 \times y_{\overrightarrow{FI}}$, les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FI}$ ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Les points F, H et I ne sont donc pas alignés.

Donc les points F, H et I définissent un plan noté (FHI).

Étape 3: $\overrightarrow{EJ}$ est-il normal au plan (FHI) ?

Le vecteur $\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (FHI) ssi ce vecteur est orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires du plan (FHI).

Or: $\begin{cases} \overrightarrow{EJ} \text{ et } \overrightarrow{FH} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{EJ}\,.\,\overrightarrow{FH} = 0 \\ \overrightarrow{EJ} \text{ et } \overrightarrow{FI} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{EJ}\,.\,\overrightarrow{FI} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\overrightarrow{EJ}\,.\,\overrightarrow{FH} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 = 0$

• $\overrightarrow{EJ}\,.\,\overrightarrow{FI} = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = 0.$

$\overrightarrow{EJ}$ étant orthogonal à $\overrightarrow{FH}$ et à $\overrightarrow{FI}$, le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Montrons qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x - 2y + z + 1 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ s'écrit:

$$a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\overrightarrow{EJ} = \left(1 ; 1 ; -\frac{1}{2}\right)$.

• le point F ∈ (FHI), avec $F = (1 ; 0 ; 1)$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a (x - x_F) + b (y - y_F) + c (z - z_F) = 0$

$$\iff 1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 0) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (z - 1) = 0$$

$$\iff x - 1 + y - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} = 0$$

ou encore $-2x - 2y + z + 1 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (FHI) est donc bien:

$$-2x - 2y + z + 1 = 0$$

4. **Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EJ):**

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A (x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u} (a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} , t \in IR.$$

Ici: • la droite (EJ) passe par le point E (0 ; 0 ; 1),

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (EJ) est $\vec{u} = \overrightarrow{EJ} = \left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (EJ) passant par le point E et de vecteur directeur $\vec{u}\left(1 ; 1 ; -\frac{1}{2}\right)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (EJ) est donc:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{1}{2} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. a. Calculons les coordonnées du point K:

K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI).

Le point K est donc le point d'intersection entre la droite (EJ) et le plan (FHI).

Les coordonnées du point K vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_k = t & (1) \\ y_k = t & (2) \\ z_k = 1 - \frac{1}{2} t & (3) \\ -2x_k - 2y_k + z_k + 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff -2x_K - 2y_K + z_K + 1 = 0 \iff -2 \times t - 2 \times t + 1 - \frac{1}{2} \times t + 1 = 0$$

$$\iff -\frac{9}{2}t + 2 = 0$$

cad $t = \frac{4}{9}$.

Les coordonnées du point K sont donc: • $x_K = \frac{4}{9}$

• $y_K = \frac{4}{9}$.

• $z_K = \frac{7}{9}$

5. b. Montrons que le volume de la pyramide EFHI est égal à $\frac{1}{6}$ cm^3:

Nous savons que le volume V d'un tétraèdre est donné par:

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h.$$

($\mathcal{B}$ = aire d'une base du tétraèdre, h = hauteur à cette base)

Ici, le tétraèdre EFHI a pour hauteur [IL] et pour base le triangle rectangle EFH (rectangle en E).

Or, l'aire du triangle rectangle EFH est $\mathcal{A} = \frac{EF \times EH}{2}$

$$= \frac{1 \times 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Avec $L\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$: $IL^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 0)^2$

$$= 1.$$

Le volume du tétraèdre EFHI est donc:

$$\frac{(\text{Aire base triangle EFH}) \times (\text{Hauteur tétraèdre EFHI})}{3}$$

$$= \frac{(\text{Aire base triangle EFH}) \times IL}{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \sqrt{1}}{3}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

Le volume du tétraèdre EFHI est donc égal à: $V = \frac{1}{6}$ cm³.

5. c. Déduisons-en l'aire du triangle FHI:

Nous savons que:
- $V(\text{EFHI}) = \frac{1}{6}$ cm³
- la base du tétraèdre est le triangle FHI
- la hauteur du tétraèdre est EK.

Or: $EK^2 = \left(\frac{4}{9} - 0 \right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0 \right)^2 + \left(\frac{7}{9} - 0 \right)^2$

$= \left(\frac{6}{9} \right)^2.$

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$$V(EFHI) = \frac{\mathcal{A}(FHI) \times EK}{3}$$

$$= x \times \frac{\frac{6}{9}}{3}$$

$$= x \times \frac{2}{9}.$$

D'où: $x = V(EFHI) \times \frac{9}{2}$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{9}{2}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

L'aire du triangle FHI est donc: $\mathcal{A}(FHI) = \frac{3}{4}$ cm^2.