www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

ASIE
2024

PYRAMIDE SABDC

CORRECTION

1. Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés:

Nous savons que: $A(3; -1; 1)$, $B(4; -1; 0)$ et $C(0; 3; 2)$.

Les points A, B et C ne sont pas alignés ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires**.

Or:

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ -1 + 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 3 + 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et: $z_{\overrightarrow{AB}} = -1 \times z_{\overrightarrow{AC}}$ et $x_{\overrightarrow{AB}} \neq -1 \times x_{\overrightarrow{AC}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et ils définissent un plan noté (ABC).

2. a. Montrons que les points A, B, C et D sont coplanaires:

Nous avons: $D(4;3;-2)$.

D'après le cours, les points A, B, C et D sont coplanaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels α et β

tels que: $\overrightarrow{AB} = \alpha . \overrightarrow{AC} + \beta . \overrightarrow{AD}$.

$$\left(\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\overrightarrow{AB} = \alpha . \overrightarrow{AC} + \beta . \overrightarrow{AD} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta . \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -3\alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3\alpha + \beta = 1 \\ \alpha = -\beta \\ -\beta - 3\beta = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3\alpha + \beta = 1 \\ \alpha = -\beta \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

cad $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{4} \\ \beta = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ avec $-3x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 1.$

Comme il existe bien deux réels $\alpha = -\dfrac{1}{4}$ et $\beta = \dfrac{1}{4}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

2. b. Montrons que le quadrilatère ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD]:

D'après la question précédente: $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AD}$. (1)

(1) <=> $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{CA} + \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AD}$

$= \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{CD}.$

Donc:
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens,
- les côtes [AB] et [CD] sont parallèles.

De plus, comme les points A, B et C ne sont pas alignés: le quadrilatère ABCD est bien un trapèze de bases [AB] et [CD].

3. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 2) est normal au plan (ABC):

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) ssi ce vecteur est orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires su plan (ABC).

Or : $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = (2 \times 1) + (1 \times 0) + (2 \times (-1)) = 0$
- $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = (2 \times (-3)) + (1 \times 4) + (2 \times 1) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$: le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal et normal au plan (ABC).

3. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (ABC):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}\,(a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici:
- un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$
- le point $A \in$ (ABC), avec $A = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 \times (x - 3) + 1 \times (y + 1) + 2 \times (z - 1) = 0$$

$$\iff 2x - 6 + y + 1 + 2z - 2 = 0$$

cad $2x + y + 2z - 7 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc: $2x + y + 2z - 7 = 0$.

3. c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ:

La droite Δ passe par le point S (2; 1; 4) et est orthogonale au plan (ABC).

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite Δ passe par le point S (2; 1; 4)

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ est $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2; 1; 2) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \times t \\ y = 1 + 1 \times t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + 2 \times t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

3. d. d$_1$. Montrons que $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right)$:

Le point I est le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (ABC).

Les coordonnées du point I vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_I = 2 + 2t & (1) \\ y_I = 1 + t & (2) \\ z_I = 4 + 2t & (3) \\ 2x_I + y_I + 2z_I - 7 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff 2x_I + y_I + 2z_I - 7 = 0 \iff 4 + 4t + 1 + t + 8 + 4t - 7 = 0$

$\iff 9t + 6 = 0$

cad $t = -\dfrac{2}{3}$.

Les coordonnées du point I sont donc: • $x_I = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$

• $y_I = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

• $z_I = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$.

3. d. d_2. Montrons que $SI = 2$ cm:

$$SI^2 = \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2$$

$$= \frac{36}{9}.$$

Dans ces conditions: $SI = \sqrt{\dfrac{36}{9}} = \dfrac{6}{3} = 2$ cm.

4. a. a_1. Montrons que les coordonnées du point H sont $(3\,;3\,;-1)$:

Le point H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

Étape 1: montrons que les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux

Nous avons: • $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \\ z_H - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4 \\ 3 - (-1) \\ -1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{CD} = 4 . \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

De plus: $\overrightarrow{BH} . \overrightarrow{CD} = (-1 \times 4) + (4 \times 0) + (-1 \times (-4)) = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont bien orthogonaux.

Étape 2: montrons que le point H est situé sur la droite (CD)

Nous avons: $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 3 - 3 \\ -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Et: $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Donc: $\overrightarrow{CH} = \dfrac{3}{4} \times \overrightarrow{CD}$.

Par conséquent, le point H est bien sur la droite (CD).

Au total, le point H (3 ; 3 ; -1) est bien le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

4. a. a_2. Montrons que $HB = 3 \times \sqrt{2}$ cm:

Nous savons que: $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{BH}$.

Dans ces conditions: $HB^2 = 1^2 + (-4)^2 + 1^2 = 18$.

Ainsi, nous avons bien: $HB = \sqrt{18} = 3 \times \sqrt{2}$ cm.

4. b. Calculons la valeur exacte de l'aire du trapèze ABCD:

L'aire du trapèze est donnée par la formule: $\mathcal{A}(ABCD) = \left(\frac{b + \mathcal{B}}{2}\right) \times h$.

(b & $\mathcal{B}$ = longueurs des bases du trapèze, h = hauteur du trapèze)

Or:
- $b = AB = \sqrt{2}$ cm
- $\mathcal{B} = CD = 4\sqrt{2}$ cm
- $h = HB = 3\sqrt{2}$ cm.

L'aire du trapèze ABCD est donc égale à:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \left(\frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2}\right) \times 3\sqrt{2}$$

$$= 15 \text{ cm}^2.$$

5. Déterminons le volume de la pyramide SABDC:

Le volume d'une pyramide est donné par la formule:

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

Or:
- aire de la base $= 15 \text{ cm}^2 = \mathcal{A}(ABCD)$
- hauteur $= 2$ cm $= SI$.

D'où le volume de la pyramide SABDC est égal à:

$$V\,(SABDC) = \frac{1}{3} \times 15 \times 2$$

$$= 10 \text{ cm}^3.$$