www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

2023

LE PRISME DROIT ABFEDCGH

CORRECTION

1. Donnons les coordonnées des points I et J:

- Le point I correspond au milieu du segment [EF].

Or:
- $\overrightarrow{AE} = 8 \cdot \vec{k}$, et donc le point **E** a pour coordonnées **(0 ; 0 ; 8)** dans le repère orthonormé (A ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$);
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$= 4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{k}.$$

Donc le point **F** a pour coordonnées **(4 ; 0 ; 4)** dans le repère orthonormé (A ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Dans ces conditions:

$$I = \begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_E + x_F}{2} \\ \dfrac{y_E + y_F}{2} \\ \dfrac{z_E + z_F}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{0+4}{2} \\ \dfrac{0+0}{2} \\ \dfrac{8+4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

• Le point J correspond au milieu du segment [AE].

Or: • E a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé (A; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$);

• A a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé (A; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Dans ces conditions:

$$J = \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \\ z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_E}{2} \\ \dfrac{y_A + y_E}{2} \\ \dfrac{z_A + z_E}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{0+0}{2} \\ \dfrac{0+0}{2} \\ \dfrac{8+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Au total, les coordonnées des points I et J sont: I $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et J $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ):

Le vecteur $\vec{n}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IGJ) ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (IGJ).

Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{GJ}$ ne sont pas proportionnels et ne sont donc pas colinéaires.

Les points I, G et J ne sont pas alignés et définissent donc le plan (IGJ).

Par conséquent, le plan (IGJ) admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{GJ}$.

En effet : • $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF}$

$$= 4 . \vec{i} + 4 . \vec{j} + \frac{1}{2} . \overrightarrow{AE}$$

$$= 4 . \vec{i} + 4 . \vec{j} + 4 . \vec{k} \qquad (\overrightarrow{AE} = 8 . \vec{k})$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

• les deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (IGJ) ont pour coordonnées:

$$\bullet\ \overrightarrow{IG} = \begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2 \\ 4 - 0 \\ 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ \overrightarrow{GJ} = \begin{pmatrix} x_G - x_J \\ y_G - y_J \\ z_G - z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 4 - 0 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{IG} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} . \overrightarrow{IG} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{GJ} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} . \overrightarrow{GJ} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n} . \overrightarrow{IG} = (-1) \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = 0$

• $\vec{n} . \overrightarrow{GJ} = (-1) \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 0 = 0.$

Comme $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{IG}$ et à $\overrightarrow{GJ}$: le vecteur $\vec{n}$ et normal au plan (IGJ).

2. b. Déterminons une équation cartésienne du plan (IGJ):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A (x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n} (a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• le point $G \in (IGJ)$, avec $G = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a (x - x_G) + b (y - y_G) + c (z - z_G) = 0$

$\iff (-1) \times (x - 4) + 1 \times (y - 4) + 1 \times (z - 4) = 0$

cad $-x + y + z - 4 = 0.$

Une équation cartésienne du plan (IGJ) est donc: $-x + y + z - 4 = 0.$

3. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d):

La droite (d) est perpendiculaire au plan (IGJ) et passe par le point H.

Les coordonnées du point H sont: $(0 ; 4 ; 8)$.

En effet: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= 4 . \vec{j} + 8 . \vec{k}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (d) passe par le point $H(0 ; 4 ; 8)$

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) est:

$$\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point H et de vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 1 ; 1)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + (-1) \times t \\ y = 4 + 1 \times t \\ z = 8 + 1 \times t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 8 + t \end{cases}$$

4. Montrons que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{8}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{16}{3}\right)$:

Le point **L** correspond au projeté orthogonal du point H sur le plan (**IGJ**).

Le point **L** est donc le point d'intersection entre la droite (d) et le plan (**IGJ**).

Les coordonnées du point **L** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = -t \quad (1) \\ y_L = 4 + t \quad (2) \\ z_L = 8 + t \quad (3) \\ -x_L + y_L + z_L - 4 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff -x_L + y_L + z_L - 4 = 0 \iff -(-t) + (4 + t) + (8 + t) - 4 = 0$$

$$\iff 3t + 8 = 0$$

$$\text{cad } t = -\frac{8}{3}.$$

Les coordonnées du point L sont donc:

- $x_L = \frac{8}{3}$
- $y_L = \frac{4}{3}$
- $z_L = \frac{16}{3}$.

5. Calculons la distance du point H au plan (IGJ):

Calculer la distance du point H au plan (IGJ) revient à déterminer **la distance HL** car L est le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).

Or: $H\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}$.

D'où: $HL = \sqrt{(x_L - x_H)^2 + (y_L - y_H)^2 + (z_L - z_H)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{16}{3} - 8\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{64}{9} + \frac{64}{9}}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

La distance du point H au plan (IGJ) est: $HL = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Montrons que le triangle IGJ est rectangle en I:

Le triangle IGJ est rectangle en I ssi: $GJ^2 = IG^2 + IJ^2$.

Or: $I = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions:
- $GJ^2 = (0 - 4)^2 + (0 - 4)^2 + (4 - 4)^2 = 32$
- $IG^2 = (4 - 2)^2 + (4 - 0)^2 + (4 - 6)^2 = 24$

• $IJ^2 = (0-2)^2 + (0-0)^2 + (4-6)^2 = 8$.

Comme $GJ^2 = IG^2 + IJ^2$, le triangle (IGJ) est: **rectangle en I**.

7. Déduisons-en le volume du tétraèdre IGJH:

Ici, nous devons déterminer le volume du tétraèdre **IGJH**.

Notons que le tétraèdre **IGJH** a pour **hauteur** HL et pour **base le triangle rectangle en I, IGJ**.

Or, d'après la question précédente: • $IG = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

• $IJ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

L'aire du triangle **IGJ** est donc égale à:

$$\frac{IG \times IJ}{2} = \frac{(2\sqrt{6}) \times (2\sqrt{2})}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Le volume du tétraèdre IGJH est donc:

$$\frac{(\text{Aire base triangle IGJ}) \times (\text{Hauteur tétraèdre IGJ})}{3}$$

$$= \frac{(\text{Aire base triangle IGJ}) \times HL}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}}{3}}{3}$$

$$= \frac{32}{3}.$$

Le volume du tétraèdre IGJH est donc: $V = \frac{32}{3}$.