BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

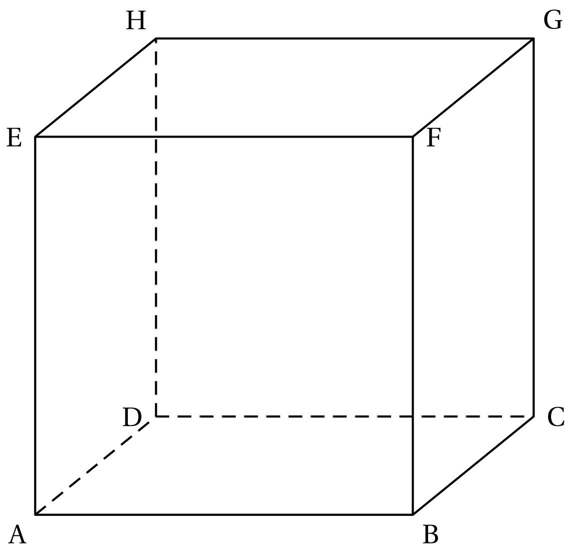
CORRIGÉ EXERCICE 2

MAYOTTE, RÉUNION
2022

VOLUME DU TÉTRAÈDRE LAGH

CORRECTION

1. a. Justifions que les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires:



Dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$), les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, et H sont:

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

et $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Dans ces conditions les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$ ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} x_D - x_E \\ y_D - y_E \\ z_D - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires ssi: **les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux.**

$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$ orthogonaux ssi: $\overrightarrow{AH} . \overrightarrow{ED} = 0$.

$\overrightarrow{AH} . \overrightarrow{ED} = (0 \times 0) + (1 \times 1) + (1 \times (-1)) = 0$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux: les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires.

1. b. Justifions que la droite (GH) est orthogonale au plan (EDH):

• Soient les vecteurs $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Notons que: $z_{\overrightarrow{ED}} = (-1) \times z_{\overrightarrow{DH}}$ et $y_{\overrightarrow{ED}} \neq (-1) \times y_{\overrightarrow{DH}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points E, D et H ne sont donc pas alignés et définissent le plan (EDH).

• Soit le vecteur directeur de la droite (GH): $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• La droite (GH) est orthogonale au plan (EDH) ssi le vecteur $\overrightarrow{GH}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{DH}$ du plan (EDH).

Or : $\begin{cases} \overrightarrow{GH} \text{ et } \overrightarrow{ED} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{GH} . \overrightarrow{ED} = 0 \\ \overrightarrow{GH} \text{ et } \overrightarrow{DH} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{GH} . \overrightarrow{DH} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\overrightarrow{GH} . \overrightarrow{ED} = ((-1) \times 0) + (0 \times 1) + (0 \times (-1)) = 0$

• $\overrightarrow{GH} . \overrightarrow{DH} = ((-1) \times 0) + (0 \times 0) + (0 \times 1) = 0.$

Comme $\overrightarrow{GH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{ED}$ et à $\overrightarrow{DH}$: (GH) est bien orthogonal au plan (EDH).

1. c. Déduisons-en que la droite (ED) est orthogonale au plan (AGH):

Nous savons que: • les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires

• les droites (ED) et (GH) sont perpendiculaires

• les droites (AH) et (GH) sont sécantes et non confondues.

Les droites (AH) et (GH) définissent ainsi deux directions distinctes du plan (AGH).

La droite (ED) étant perpendiculaire aux droites (AH) et (GH): (ED) est perpendiculaire ou orthogonale au plan (AGH).

2. a. Donnons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ED}$:

Comme déjà vu: $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (AGH):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• le point $G \in (AGH)$, avec $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_G) + b(y - y_G) + c(z - z_G) = 0$

$\iff 0 \times (x - 1) + 1 \times (y - 1) + (-1) \times (z - 1) = 0$

$\iff y - 1 - z + 1 = 0$

cad $y - z = 0$.

Une équation cartésienne du plan (AGH) est donc: $y - z = 0$.

3. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EL):

Le point L a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; 1 ; 0\right)$.

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.

• La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in IR.$$

Ici: • la droite **(EL)** passe par le point **E (0; 0; 1)**,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite **(EL)** est:

$$\vec{u} = \overrightarrow{EL} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où une représentation paramétrique de la droite **(EL)** passant par le point **E** et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{2}{3}; 1; -1\right)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + \frac{2}{3} \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 + (-1) \times t \end{cases}, t \in IR.$$

Une représentation paramétrique de la droite (EL) est donc:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}t \\ y = t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - t \end{cases}$$

3. b. Déterminons l'intersection de la droite (EL) et du plan (AGH):

Soit **W** le point d'intersection entre la droite (EL) et le plan (AGH).

Les coordonnées du point **W** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_W = \frac{2}{3}t & (1) \\ y_W = t & (2) \\ z_W = 1 - t & (3) \\ y_W - z_W = 0 & (4) \end{cases} .$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff y_W - z_W = 0 \iff t - (1 - t) = 0$

cad $t = \frac{1}{2}$.

Les coordonnées du point W sont donc:
- $x_W = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
- $y_W = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

• $z_W = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3. c. **Montrons que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:**

Ici, le point **K** correspond au projeté orthogonal du point **L** sur le plan (AGH).

K est le projeté orthogonal de **L** sur le plan (AGH) ssi:

- K ∈ (AGH) (1)
- $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux (2)
- $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont orthogonaux (3)

• **K appartient-il au plan (AGH) ?**

Une équation cartésienne du plan (AGH) est: $y - z = 0$.

Les coordonnées du point **K** sont: $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Or: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Donc: K ∈ (AGH).

• **Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont-ils orthogonaux ?**

$\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux ssi: $\overrightarrow{LK} . \overrightarrow{AH} = 0$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont pour coordonnées: • $\overrightarrow{LK} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où: $(0 \times 0) + \left(-\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) = 0$.

Donc: $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

• **Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils orthogonaux ?**

$\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont orthogonaux ssi: $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{GH} = 0$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{GH}$ ont pour coordonnées: • $\overrightarrow{LK} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où: $(0 \times (-1)) + \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \times 0\right) + \left(\frac{1}{2} \times 0\right) = 0$.

Donc: $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont orthogonaux.

Comme les conditions (1), (2) et (3) sont bien réunies, le point $K\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

est bien le projeté orthogonal du point L sur le plan (AGH).

3. d. Montrons que la distance du point L au plan (AGH) est $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

La distance du point L au plan (AGH) est: **LK**.

$$LK = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc la distance du point L au plan (AGH) est bien égale à:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ (unité de longueur).

3. e. Déterminons le volume du tétraèdre LAGH:

Le tétraèdre LAGH a pour **hauteur [LK]** et pour **base le triangle rectangle AGH**.

Nous savons que le volume du tétraèdre LAGH est donné par:

$$\frac{(\text{ Aire base triangle AGH }) \times (\text{ Hauteur tétraèdre LAGH })}{3}$$

$$= \frac{(\text{ Aire base triangle AGH }) \times LK}{3}$$

$$= \frac{\left[\frac{AH \times HG}{2}\right] \times LK}{3}$$

$$= \frac{\left[\frac{\sqrt{2} \times 1}{2}\right] \times LK}{3}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

Le volume du tétraèdre LAGH est donc égal à: $\frac{1}{6}$ unité de volume.