www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

CENTRES ÉTRANGERS 1

2024

$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

CORRECTION

1. Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés:

Nous savons que: $A(-2;0;2)$, $B(-1;3;0)$ et $C(1;-1;2)$.

Les points A, B et C ne sont pas alignés ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires**.

Or: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-0 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et: $x_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{3} \times x_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}} \neq \frac{1}{3} \times z_{\overrightarrow{AC}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et par conséquent **les points A, B et C ne sont pas alignés**.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et ils définissent un plan noté (ABC).

2. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC):

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal ou normal au plan (ABC) ssi ce vecteur est orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Or : $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times (-2) = 0$
- $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 3 \times (-1) + 5 \times 0 = 0.$

Comme $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$: le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal (et normal) au plan (ABC).

2. b. Justifions qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $x + 3y + 5z - 8 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A (x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}$ (a; b; c) s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici:
- un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$
- le point $A \in$ (ABC), avec $A = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}.$

Ainsi, nous pouvons écrire: $a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0$

$\Longleftrightarrow\ 1 \times (x - (-2)) + 3 \times (y - 0) + 5 \times (z - 2) = 0$

$\Longleftrightarrow\ x + 2 + 3y + 5z - 10 = 0$

cad $x + 3y + 5z - 8 = 0.$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc bien:

$$x + 3y + 5z - 8 = 0.$$

2. c. Déduisons-en que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires:

Nous avons: $D\,(0\,;0\,;3)$.

D'après le cours, les points A, B, C et D sont coplanaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Or ici, une équation cartésienne du plan (ABC) est: $x + 3y + 5z - 8 = 0.$

Et: $x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 - 8 = 7 \neq 0.$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) et par conséquent: les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. a. Justifions que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D:

Nous savons que: • $\mathcal{D}_1$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

• $D(0\,;0\,;3)$.

Dans ces conditions, le point $D \in \mathcal{D}_1$ car, avec $t = 0$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$.

De plus, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est **le vecteur** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ qui n'est autre que le vecteur $\vec{n}$, qui est normal au plan (ABC).

Donc la droite $\mathcal{D}_1$ est orthogonale au plan (ABC) et par conséquent : $\mathcal{D}_1$ correspond bien à la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.

3. b. Montrons que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminons les coordonnées de leur point d'intersection:

Nous savons que : • une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

• une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_2$ est

$$\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}.$$

Pour répondre à la question, nous allons résoudre le système:

$$\begin{cases} t = 1 + 3s & \color{red}{(1)} \\ 3t = -1 - 5s & \color{red}{(2)} \\ 3 + 5t = 2 - 6s & \color{red}{(3)} \end{cases} .$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases} \iff \begin{cases} -4 - 14s = 0 & (2) - 3 \times (1) \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s = -\dfrac{2}{7} \\ t = \dfrac{-1 - 5 \times \left(-\dfrac{2}{7}\right)}{3} \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s = -\dfrac{2}{7} \\ t = \dfrac{1}{7} \\ 3 + 5 \times \left(\dfrac{1}{7}\right) = 2 - 6 \times \left(-\dfrac{2}{7}\right) \text{ ? YES} \end{cases}$$

Au total, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en $I\,(x_I\,;y_I\,;z_I)$ avec:

- $x_I = t = \dfrac{1}{7}$

- $y_I = 3t = \dfrac{3}{7}$

- $z_I = 3 + 5t = \frac{26}{7}$.

4. a. Déterminons les coordonnées du point H:

H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Le point H est donc le point d'intersection entre la droite $\mathcal{D}$, et le plan (ABC).

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = t & (1) \\ y_H = 3t & (2) \\ z_H = 3 + 5t & (3) \\ x_H + 3y_H + 5z_H - 8 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff x_H + 3\,y_H + 5\,z_H - 8 = 0 \iff t + 3 \times (3t) + 5 \times (3 + 5t) - 8 = 0$$

$$\iff t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0$$

$$\iff 35t + 7 = 0$$

cad $t = -\frac{1}{5}$.

Les coordonnées du point H sont donc:

- $x_H = -\frac{1}{5}$
- $y_H = -\frac{3}{5}$
- $z_H = 3 + 5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 2$.

4. b. Calculons la distance du point D au plan (ABC):

Calculer la distance du point D au plan (ABC) revient à calculer: DH.

Or: $DH^2 = \left(-\frac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2 + (2-3)^2 = \frac{35}{25}$.

Ainsi, la distance du point D au plan (ABC) est égale à:

$$DH = \sqrt{\frac{35}{25}} \approx 1,18.$$