BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2024

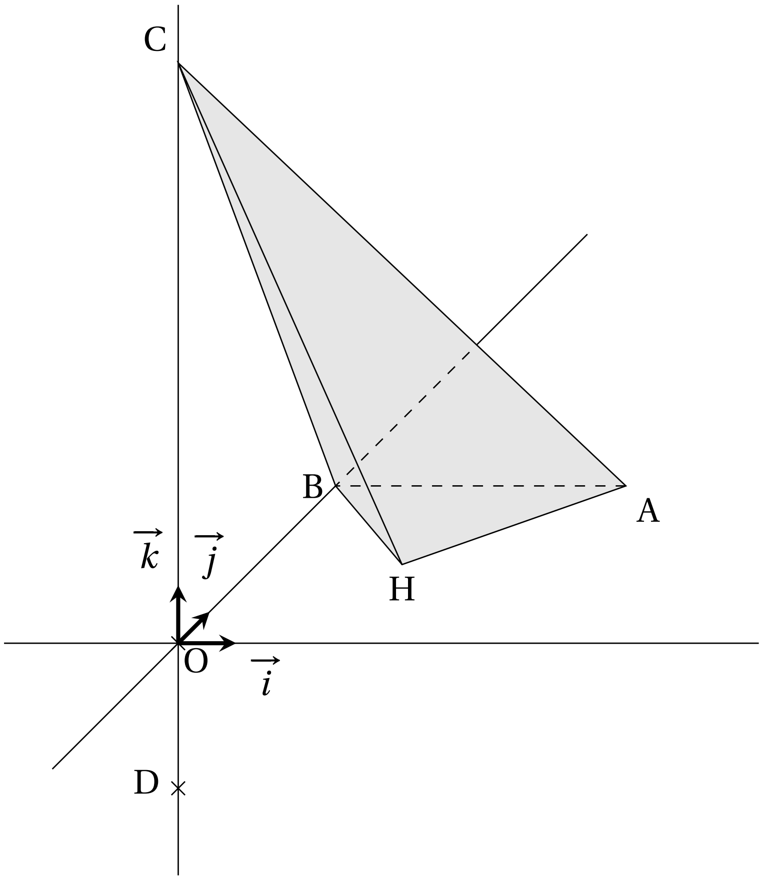
TRIANGLES RECTANGLES ABH & ABC

CORRECTION

1. a. Montrons que $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal au plan (CAD):

Étape 1: C, A et D définissent-ils un plan ?

Nous savons que: $C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$.



D'après le cours, les points C, A et D définissent un plan ssi **les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires**.

Or: • $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \\ z_A - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{25}{2} \end{pmatrix}$.

Comme $x_{\overrightarrow{CD}} = 0 \times x_{\overrightarrow{CA}}$ et $z_{\overrightarrow{CD}} \neq 0 \times z_{\overrightarrow{CA}}$, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Les points C, A et D ne sont donc pas alignés.

Donc les points C, A et D définissent un plan noté (CAD).

Étape 2: $\overrightarrow{n_1}$ est-il un vecteur normal au plan (CAD) ?

Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (CAD) ssi ce vecteur est orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires du plan (CAD).

Or : $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \text{ et } \overrightarrow{CA} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CD} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 0$

• $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times \left(-\frac{25}{2}\right) = 0.$

Comme $\overrightarrow{n_1}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{CA}$ et à $\overrightarrow{CD}$: le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est normal au plan (CAD).

1. b. Déduisons-en que le plan (CAD) a pour équation cartésienne $x - y = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A (x_A ; y_A ; z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• le point A ∈ (CAD), avec $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\iff 1 \times (x - 5) + (-1) \times (y - 5) + 0 \times (z - 0) = 0$

cad $x - y = 0$.

Une équation cartésienne du plan (CAD) est donc bien: $x - y = 0$.

2. a. Justifions que H a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2} ; \frac{5}{2} ; 0\right)$:

La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique: $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Le point H est le point d'intersection entre la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD).

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = \frac{5}{2}t & (1) \\ y_H = 5 - \frac{5}{2}t & (2) \\ z_H = 0 & (3) \\ x_H - y_H = 0 & (4) \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff x_H - y_H = 0 \iff \frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0$$

$$\iff 5t - 5 = 0$$

cad $t = 1$.

Les coordonnées du point H sont donc: • $x_H = \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$

• $y_H = 5 - \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$.

• $z_H = 0 = 0$

2. b. Montrons que le point H est le projeté orthogonal de B sur (CAD):

H est-il le projeté orthogonal du point B sur le plan (CAD) ?

D'après l'énoncé: • $B\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

• la droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}, t \in IR.$$

Or: • $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 + \dfrac{5}{2} \times t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2} \times t \\ z = 0 + 0 \times t \end{cases}, t \in IR,$

• les coefficients de " t " dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$ sont

$$\begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \times \vec{n_1}$, nous pouvons affirmer que la droite $\mathcal{D}$

contient le point B et a pour coefficient directeur $\vec{n_1}$.

Ainsi le point H est bien le projeté orthogonal de B sur (CAD).

3. a. **Montrons que le triangle ABH est rectangle en H:**

Nous avons: $A\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le triangle ABH est rectangle en H ssi: $AB^2 = AH^2 + BH^2$.

Or: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: • $AB^2 = (-5)^2 + 0^2 + 0^2 = 25$

• $AH^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{25}{2}$

• $BH^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{25}{2}$.

Comme $AB^2 = AH^2 + BH^2$, le triangle ABH est rectangle en H.

3. b. Déduisons-en que l'aire du triangle ABH $= \frac{25}{4}$:

L'aire du triangle ABH est: $\mathcal{A} = \frac{AH \times BH}{2}$

$$= \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \times \sqrt{\frac{25}{2}}}{2}$$

$$= \frac{25}{4}.$$

L'aire du triangle ABH est donc bien égale à: $\mathcal{A} = \frac{25}{4}$.

4. a. Montrons que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C:

Il est clair que (CO) correspond bien à la hauteur du tétraèdre issue de C.

Et: $CO^2 = (0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 10)^2$

$= 100$.

Ainsi (CO) est bien la hauteur du tétraèdre issue de C avec: $CO = 10$.

4. b. Déduisons-en le volume du tétraèdre ABCH:

Nous savons que le volume V d'un tétraèdre est donné par:

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h.$$

($\mathcal{B}$ = aire d'une base du tétraèdre, h = hauteur à cette base)

Ici, le tétraèdre **ABCH** a pour **hauteur [CO]** et pour **base le triangle rectangle ABH**.

Le volume du tétraèdre ABCH est donc:

$$\frac{(\text{ Aire base triangle ABH }) \times (\text{ Hauteur tétraèdre ABCH })}{3}$$

$$= \frac{(\text{ Aire base triangle ABH }) \times CO}{3}$$

$$= \frac{\frac{25}{4} \times 10}{3}$$

$$= \frac{125}{6}.$$

Le volume du tétraèdre ABCH est donc égal à: $V = \frac{125}{6}$ **unités de volume.**

5. Déduisons la distance du point H au plan (ABC):

Nous savons que: • $H\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$

• **le triangle ABC est rectangle en B**

• $V(ABCH) = \frac{125}{6}.$

Soit ℓ la distance du point H au plan **(ABC)**.

Nous avons: $V(ABCH) = \dfrac{\mathcal{A}(ABC) \times d}{3}$

$= \dfrac{\dfrac{AB \times BC}{2} \times d}{3}$

$= \dfrac{\dfrac{5 \times (5\sqrt{5})}{2} \times d}{3}$, car: $BC^2 = 125$

$= \dfrac{25\sqrt{5}}{6} \times d.$

On en déduit: $d = V(ABCH) \times \left(\dfrac{6}{25\sqrt{5}}\right)$

$= \dfrac{125}{6} \times \dfrac{6}{25\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5}.$

La distance du point H au plan (ABC) est donc: $d = \sqrt{5}.$