BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

POLYNÉSIE

2024

DRONES LUMINEUX

CORRECTION

1. Justifions que les points A, B et C ne sont pas alignés:

Nous savons que: $A(-1;-1;17)$, $B(4;-2;4)$ et $C(-1;-3;7)$.

Les points A, B et C ne sont pas alignés ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.**

Or: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ -2+1 \\ 4-17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ -3+1 \\ 7-17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Et: $x_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} \times x_{\overrightarrow{AC}}$ et $y_{\overrightarrow{AB}} \neq \frac{5}{2} \times y_{\overrightarrow{AC}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et par conséquent **les points A, B et C ne sont pas alignés.**

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et ils définissent un plan noté (ABC).

2. a. Montrons que $\vec{n}$ (2 ; -3 ; 1) est normal au plan (ABC):

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) ssi ce vecteur est orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = (2 \times 5) + (-3 \times (-1)) + (1 \times (-13)) = 0$

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = (2 \times 2) + (-3 \times (-2)) + (1 \times (-10)) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$: le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal et normal au plan (ABC) = $\mathcal{P}$.

2. b. Montrons qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x - 3y + z - 18 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A (x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A).$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

• le point $A \in (ABC)$, avec $A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $2 \times (x + 1) - 3 \times (y + 1) + 1 \times (z - 17) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $2x + 2 - 3y - 3 + z - 17 = 0$

cad $2x - 3y + z - 18 = 0$.

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc bien: $2x - 3y + z - 18 = 0$.

3. a. Déterminons un vecteur directeur de la droite " d ":

D'après l'énoncé, une équation paramétrique de la droite **d** est:

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Dans ces conditions, la droite **d**: • passe par le point (2 ; 5 ; 1)

• a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. b. Déterminons les coordonnées du point E:

Le point **E** est le point d'intersection de la droite **d** avec le plan $\mathcal{P}$.

Les coordonnées du point **E** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_E = 3t + 2 & (1) \\ y_E = t + 5 & (2) \\ z_E = 4t + 1 & (3) \\ 2x_E - 3y_E + z_E - 18 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

(4) <=> $2x_E - 3y_E + z_E - 18 = 0$ <=> $6t + 4 - 3t - 15 + 4t + 1 - 18 = 0$

<=> $7t - 28 = 0$

cad $t = 4$.

Les coordonnées du point E sont donc:
- $x_E = 3 \times 4 + 2 = 14$
- $y_E = 4 + 5 = 9$
- $z_E = 4 \times 4 + 1 = 17$.

4. Montrons que la distance D à $\mathcal{P}$ vaut $2\sqrt{14}$:

Soit Δ, la droite qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Soit F (6 ; -1 ; 3), le point d'intersection entre Δ et $\mathcal{P}$.

Ici, il s'agit donc de calculer la distance DF.

Or le point de départ D a pour coordonnées (2 ; 5 ; 1).

Dans ces conditions: $DF^2 = (6 - 2)^2 + (-1 - 5)^2 + (3 - 1)^2$

$= 16 + 36 + 4$

$= 56$.

D'où la distance du point D à $\mathcal{P}$ est égale à: $DF = \sqrt{56} = 2 \times \sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. Le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

Il reste **40 secondes** et le drone vole en trajectoire rectiligne à **$18,6\ m.s^{-1}$**.

Dans ces conditions, il faudra au drone : $t = \frac{DF}{18,6} = \frac{2\sqrt{14} \times 100}{18,6}$

$= 40,23$ secondes.

Donc désolé car il n'arrivera pas à temps.