Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

MINI COURS

A. Module d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit $z = x + iy$. Le module de z, noté $r = |z|$, est le réel positif ou nul :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Exemples :

- si $z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$
- si $z = 1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$
- si $z = 1 - i\sqrt{3}$: $|z| = 2$ cad $r = 2$.

4. Propriétés :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes:

- $|z| \geqslant 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\alpha \cdot z| = \sqrt{\alpha^2} \cdot |z|$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$

- $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

B. Ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 :

1. Définition :

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes **de module égal à 1** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| = 1\}.$$

2. Exemples :

- $z = 1$.
- $z = i$.
- $z = -i$.
- $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. Arguments d'un nombre complexe :

1. Définition :

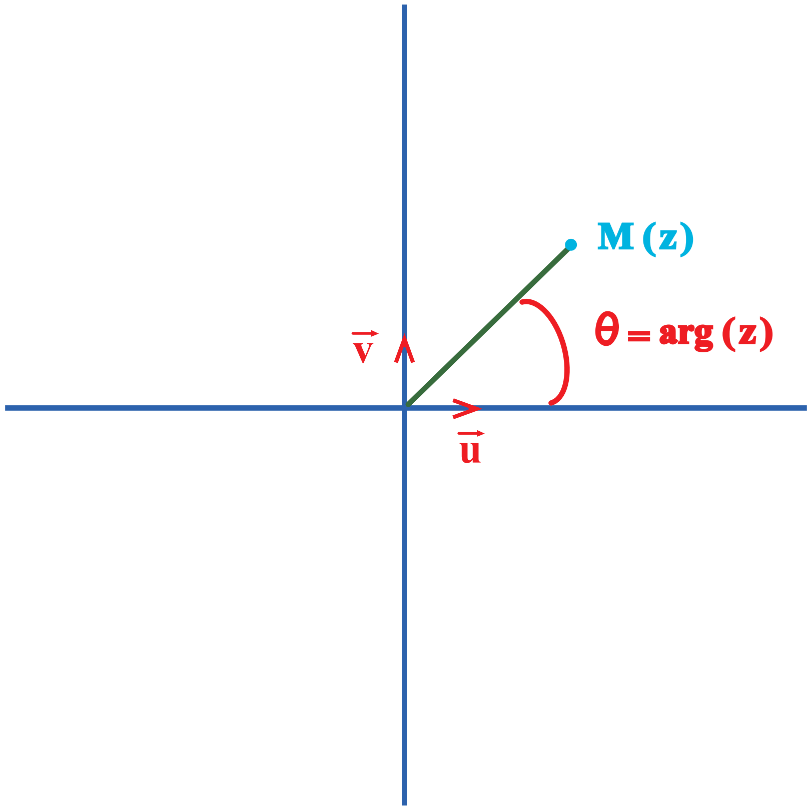
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$.

- Il existe des réels θ tels que: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$.

• Les réels θ vérifiant ce système sont appelées **arguments de z.**

2. Représentation graphique :

On se place dans un plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.



3. Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

• $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$

• $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$

• $\arg(-\bar{z}) = -\arg(z) + \pi\ (2\pi)$

• $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ (\pi)$ (z est un réel)

• $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ (z est un imaginaire pur)

4. Autres propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ (2\pi)$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ (2\pi)$ (avec : $n \in \mathbb{Z}$)

D. Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit z un nombre complexe non nul avec : $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ (2\pi)$.

La forme trigonométrique de z s'écrit : $z = r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

2. Propriété :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$z' = z \ \text{ ssi } \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z)\ (2\pi) \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta\ (2\pi) \end{cases}.$$

E. Formules trigonométriques à connaître :

1. Formules d'addition :

Soient a et b deux réels.

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

2. Autres formules :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

- $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

F. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1. Notation si $z = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$:

Pour tout réel θ : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

2. Forme exponentielle de $z = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$:

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$:

$$z = r\,e^{i\theta}.$$

G. Formules de Moivre et d'Euler :

1. Formule de Moivre :

Pour tout réel θ et tout entier naturel n :

$$[r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^n = r^n \cdot (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

ou

$$[r \cdot e^{i\theta}]^n = r^n \cdot e^{in\theta}.$$

2. Formule d'Euler :

Pour tout réel θ :

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.