Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

CORRECTION

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$:

Soit l'équation: $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ $\quad (aZ^2 + bZ + c = 0)$.

Calculons: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ici: $a = 1$, $b = 4$ et $c = 16$.

D'où: $\Delta = -48$ cad $\Delta = (4i\sqrt{3})^2$.

D'où deux solutions:

- $Z_1 = \dfrac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - i(2\sqrt{3})$,
- $Z_2 = \dfrac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + i(2\sqrt{3})$.

2. Écrivons les solutions de l'équation (2) sous forme exponentielle:

2. a. En ce qui concerne $Z_1 = -2 - i(2\sqrt{3})$:

- Le module de Z_1 est: $r_1 = 4$.
- Dans ces conditions: $Z_1 = 4\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$.

D'où: $\begin{cases} -2 = 4\cos\theta_1 \\ -2\sqrt{3} = 4\sin\theta_1 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} \cos\theta_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_1 = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• **Ainsi, sous forme exponentielle:** $Z_1 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. b. En ce qui concerne $Z_2 = -2 + i(2\sqrt{3})$:

• Le module de Z_2 est: $r_2 = 4$.

• Dans ces conditions: $Z_2 = 4(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

D'où: $\begin{cases} -2 = 4\cos\theta_2 \\ 2\sqrt{3} = 4\sin\theta_2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• **Ainsi, sous forme exponentielle:** $Z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Au total, sous forme exponentielle: $Z_1 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. Déduisons-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1):

Nous allons distinguer deux cas: quand $Z = Z_1$ et quand $Z = Z_2$.

$Z^2 + 4Z + 16 = 0$ <=> $(z^2)^2 + 4(z^2) + 16 = 0$.

• Premier cas: $Z = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

$Z = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \iff z^2 = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^2$

$\iff z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = -2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Ainsi, deux solutions dans ce premier cas: $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

• Second cas: $Z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$Z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff z^2 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^2$

$\iff z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Ainsi, deux solutions dans ce second cas: $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_4 = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Au total l'équation (1) admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$
- $z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$
- $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$
- $z_4 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$