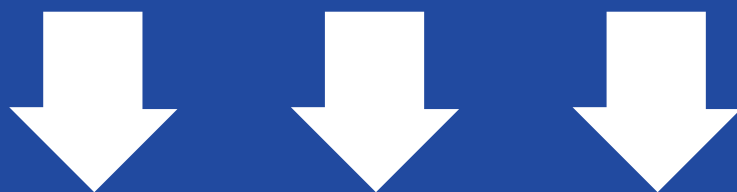


www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

CORRECTION

1. Résolvons dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$:

Soit l'équation: $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ ($aZ^2 + bZ + c = 0$).

Calculons: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ici: $a = 1, b = 4$ et $c = 16$.

D'où: $\Delta = -48$ cad $\Delta = (4i\sqrt{3})^2$.

D'où deux solutions: $\bullet z_1 = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - i(2\sqrt{3}),$

$\bullet z_2 = \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + i(2\sqrt{3}).$

2. Écrivons les solutions de l'équation (2) sous forme exponentielle:

2. a. En ce qui concerne $z_1 = -2 - i(2\sqrt{3})$:

- Le module de z_1 est: $r_1 = 4$.
- Dans ces conditions: $z_1 = 4(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).$

$$\text{D'où: } \begin{cases} -2 = 4 \cos \theta_1 \\ -2\sqrt{3} = 4 \sin \theta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta_1 = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ cad } \theta_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- Ainsi, sous forme exponentielle: $Z_1 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. b. En ce qui concerne $Z_2 = -2 + i(2\sqrt{3})$:

- Le module de Z_2 est: $r_2 = 4$.
- Dans ces conditions: $Z_2 = 4(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$.

$$\text{D'où: } \begin{cases} -2 = 4 \cos \theta_2 \\ 2\sqrt{3} = 4 \sin \theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ cad } \theta_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- Ainsi, sous forme exponentielle: $Z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Au total, sous forme exponentielle: $Z_1 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. Déduisons-en les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (1):

Nous allons distinguer deux cas: quand $Z = Z_1$, et quand $Z = Z_2$.

$$Z^2 + 4Z + 16 = 0 \Leftrightarrow (z^2)^2 + 4(z^2) + 16 = 0.$$

• Premier cas: $Z = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

$$Z = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z^2 = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^2$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } z = -2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Ainsi, deux solutions dans ce premier cas: $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

• Second cas: $Z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$Z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z^2 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^2$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Ainsi, deux solutions dans ce second cas: $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_4 = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Au total l'équation (1) admet quatre solutions dans \mathbb{C} :

$$\bullet z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\bullet z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\bullet z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\bullet z_4 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$$