Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$z^3 + (1 - i)z^2 + (1 - i)z - i = 0$

CORRECTION

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (1 - i)z^2 + (1 - i)z - i = 0$:

Étape 1: on trouve une racine évidente.

" i " est une racine évidente car: $(i)^3 + (1 - i) \times (i)^2 + (1 - i) \times (i) - i = 0$.

Étape 2: on réécrit l'équation $z^3 + (1 - i)z^2 + (1 - i)z - i = 0$.

$z^3 + (1 - i)z^2 + (1 - i)z - i = 0 \iff (z - i)(az^2 + bz + c) = 0$.

Étape 3: on détermine a, b et c.

$(z - i)(az^2 + bz + c) = 0 \iff az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic = 0$

$\iff az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic = 0$.

Par identification avec l'équation d'origine, nous avons:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = 1 - i \\ c - ib = 1 - i \\ -ic = -i \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \\ c = 1 \end{cases}$$

Dans ces conditions: $z^3 + (1 - i)z^2 + (1 - i)z - i = 0 \iff (z - i)(z^2 + z + 1) = 0.$

Étape 4: on résoud l'équation du second degré $z^2 + z + 1 = 0$.

Calculons $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ici: $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.

D'où: $\Delta = -3$.

Or: $-3 = (i\sqrt{3})^2$.

D'où deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ cad $z_1 = -\dfrac{1}{2} - i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ cad $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Conclusion:

L'équation $z^3 + (1 - i)z^2 + (1 - i)z - i = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont:

- $z_1 = -\dfrac{1}{2} - i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(= j)$
- $z_3 = i$.