

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$$P(z) = 0 \dots$$

2

CORRECTION

1. Montrons que $P(z)$ est factorisable par $z^2 + 2$:

Ici: $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6$.

$P(z)$ est factorisable par " $z^2 + 2$ " ssi il existe trois réels a , b et c tels que:

$$P(z) = (z^2 + 2)(az^2 + bz + c).$$

$$\begin{aligned} P(z) = (z^2 + 2)(az^2 + bz + c) &\Leftrightarrow P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + 2az^2 + 2bz + 2c \\ &\Leftrightarrow P(z) = az^4 + bz^3 + (c + 2a)z^2 + 2bz + 2c \end{aligned}$$

Par identification, nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c + 2a = 5 \\ 2b = 2 \\ 2c = 6 \end{array} \right. \text{ cad } \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{array} \right.$$

Ainsi, $P(z)$ est bien factorisable par " $z^2 + 2$ " et nous avons:

$$P(z) = (z^2 + 2)(z^2 + z + 3).$$

2. Déduisons-en les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$:

$$P(z) = 0 \text{ ssi } z^2 + 2 = 0 \text{ ou } z^2 + z + 3 = 0.$$

- L'équation $z^2 + 2 = 0$ admet deux solutions: $z_1 = \sqrt{2}i$ et $z_2 = -\sqrt{2}i$;
- L'équation $z^2 + z + 3 = 0$ ($\Delta = -11$) admet deux solutions:

$$z_3 = \frac{-1 - \sqrt{11}i}{2} \text{ et } z_4 = \frac{-1 + \sqrt{11}i}{2}.$$

Au total, l'équation $P(z) = 0$ admet 4 solutions:

$$z_1 = \sqrt{2}i, z_2 = -\sqrt{2}i, z_3 = \frac{-1 - \sqrt{11}i}{2} \text{ et } z_4 = \frac{-1 + \sqrt{11}i}{2}.$$