Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

P (z) = 0... 1

CORRECTION

1. **Déterminons les solutions α et β demandées:**

a. Détermination de la solution réelle α:

D'après l'énoncé, α est une solution réelle cad de la forme: $\alpha = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Par tâtonnement, on trouve: $\alpha = 4$.

En effet: $(4)^3 - 2(4)^2 - (4 + 4i)(4) - 16 + 16i = 0$.

Ainsi, l'unique solution réelle de l'équation P (z) = 0 est: $\alpha = 4$.

b. Détermination de la solution imaginaire pure β:

D'après l'énoncé, β est une solution imaginaire pure cad de la forme:

$$\beta = i \cdot y, y \in \mathbb{R}^*.$$

Par tâtonnement, on trouve: $\beta = 2i$.

En effet: $(2i)^3 - 2(2i)^2 - (4 + 4i)(2i) - 16 + 16i = 0$.

Ainsi, l'unique solution imaginaire pure de l'équation P (z) = 0 est: $\beta = 2i$.

2. Déterminons le complexe tel que $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma) = 0$:

$(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma) = 0 \iff (z - 4)(z - 2i)(z - \gamma) = 0$

$\iff (z^2 - 2iz - 4z + 8i)(z - \gamma) = 0$

$\iff z^3 + (-\gamma - 2i - 4)z^2 + (2i\gamma + 4\gamma + 8i)z - 8i\gamma = 0.$

Or: $P(z) = 0 \iff z^3 - 2z^2 - (4 + 4i)z - 16 + 16i = 0.$

Par identification, nous avons:

$$\begin{cases} -\gamma - 2i - 4 = -2 \\ 2i\gamma + 4\gamma + 8i = -(4 + 4i) \\ -8i\gamma = -16 + 16i \end{cases} \quad \text{cad} \quad \left\{ \gamma = -2 - 2i. \right.$$

Au total, le complexe γ tel que $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma) = 0$ est: $\gamma = -2 - 2i.$