

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Nombres Complexes  
Équations Polynomiales



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

2

## CORRECTION

1. Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2(2 - i)z + 3(1 - 2i) = 0$ :

Soit l'équation:  $z^2 - 2(2 - i)z + 3(1 - 2i) = 0$  ( $az^2 + bz + c = 0$ ).

Calculons:  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Ici:  $a = 1$ ,  $b = -2(2 - i)$  et  $c = 3(1 - 2i)$ .

D'où:  $\Delta = 8i$ .

Nous devons trouver un nombre complexe  $\alpha = a + ib$  tel que:  $\alpha^2 = \Delta$ .

Nous avons: •  $\alpha^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + i(2ab)$ ,

•  $\Delta = 8i$ .

• D'où:  $\alpha^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 8 \end{cases}$ .

• De plus, comme  $\alpha^2 = \Delta$ :  $|\alpha|^2 = |\Delta|$  **cad**  $a^2 + b^2 = 8$ .

Par conséquent, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \\ ab = 4 \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \\ ab > 0 \end{cases} \text{ (I).} \quad \text{(i)}$$

Du système (I), nous déduisons  $2a^2 = 8$  cad  $a^2 = 4$  cad  $a = 2$  ou  $a = -2$ .

Dans ces conditions:  $b = 2$  ou  $b = -2$ .

Notons que l'inégalité (i) nous permet d'affirmer que  $a$  et  $b$  sont de même signe.

Ainsi:  $\alpha' = -2 - 2i$  et  $\alpha'' = 2 + 2i$ .

Prenons  $\alpha'$  (nous aurions pu prendre aussi  $\alpha''$ ).

Nous avons donc:

- $z_1 = \frac{-b - \alpha'}{2a}$
- $z_2 = \frac{-b + \alpha'}{2a}$ .

En conclusion, les deux solutions sont:

$$\begin{aligned} \bullet z_1 &= \frac{2(2 - i) + 2 + 2i}{2} & \bullet z_1 &= 3, \\ \bullet z_2 &= \frac{2(2 - i) - 2 - 2i}{2} & \bullet z_2 &= 1 - 2i \end{aligned} \quad \text{cad}$$

2. Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$ :

Soit l'équation:  $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$  ( $az^2 + bz + c = 0$ ).

Calculons:  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Ici:  $a = 1, b = -(1 + i\sqrt{3})$  et  $c = -1 + i\sqrt{3}$ .

D'où:  $\Delta = 2 - 2i\sqrt{3}$ .

Nous devons trouver un nombre complexe  $\alpha = a + ib$  tel que:  $\alpha^2 = \Delta$ .

Nous avons: •  $\alpha^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + i(2ab)$ ,

•  $\Delta = 2 - 2i\sqrt{3}$ .

• D'où:  $\alpha^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2ab = -2\sqrt{3} \end{cases}$ .

• De plus, comme  $\alpha^2 = \Delta$ :  $|\alpha|^2 = |\Delta|$  **cad**  $a^2 + b^2 = 4$ .

Par conséquent, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ 2ab = -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ ab = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ **cad** } \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \text{ (I)} \\ ab < 0 \text{ (i)} \end{cases}$$

Du système (I), nous déduisons  $2a^2 = 6$  **cad**  $a^2 = 3$  **cad**  $a = \sqrt{3}$  ou  $a = -\sqrt{3}$ .

Dans ces conditions:  $b = 1$  ou  $b = -1$ .

Notons que l'inégalité (i) nous permet d'affirmer que  $a$  et  $b$  sont de signes opposés.

Ainsi:  $\alpha' = \sqrt{3} - i$  et  $\alpha'' = -\sqrt{3} + i$ .

Prenons  $\alpha'$  (nous aurions pu prendre aussi  $\alpha''$ ).

Nous avons donc: •  $z_1 = \frac{-b - \alpha'}{2a}$

•  $z_2 = \frac{-b + \alpha'}{2a}$

En conclusion, les deux solutions sont:

•  $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{2}$

cad

•  $z_1 = \frac{(1 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} + 1)}{2}$

•  $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i}{2}$

•  $z_2 = \frac{(1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)}{2}$