www.freemaths.fr

Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATION DU TYPE : $z^2 = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$

3

CORRECTION

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$.

Il s'agit ici de déterminer z tel que: $z^2 = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$.

- Sous forme trigonométrique: $z = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$.

  (r_1 étant son module et θ_1 son argument)

- Notons que: $(1 - i)(\sqrt{3} + 3i) = (\sqrt{3} + 3) + i\,(3 - \sqrt{3})$.

D'où: • le module de $(1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$ est $r_2 = \sqrt{(\sqrt{3} + 3)^2 + (3 - \sqrt{3})^2}$

cad $r_2 = 2\sqrt{6}$,

• l'argument de $(1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$ est $\theta_2 = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

En effet: • $(1 - i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

• $(\sqrt{3} + 3i) = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Et donc: $(1-i)(\sqrt{3}+3i) = (\sqrt{2}) \times (2\sqrt{3})\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$= 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

- Dans ces conditions, nous devons déterminer r_1 et θ_1:

$z^2 = (1-i)(\sqrt{3}+3i) \iff [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)]^2 = 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

$$\iff r_1^2(\cos(2\theta_1) + i\sin(2\theta_1)) = 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$\iff \begin{cases} r_1^2 = 2\sqrt{6} \\ 2\theta_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r_1 = (2\sqrt{6})^{1/2} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En définitive les deux solutions de l'équation sont:

- $z' = (2\sqrt{6})^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right)$ (on prend $k = 0$)

- $z'' = (2\sqrt{6})^{1/2}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{24}\right)\right)$ (on prend $k = 1$).