www.freemaths.fr

Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATION DU TYPE : $z^2 = \frac{1 - i}{1 + i}$ 2

CORRECTION

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 = \frac{1 - i}{1 + i}$.

Il s'agit ici de déterminer z tel que: $z^2 = \frac{1 - i}{1 + i}$.

- Sous forme trigonométrique: $z = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$.

  (r_1 étant son module et θ_1 son argument)

- Notons que: $\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i) \times (1 - i)}{(1 + i) \times (1 - i)} = \frac{1 - i - i - 1}{2} = -i$.

D'où: • le module de $\frac{1 - i}{1 + i}$ est $r_2 = \sqrt{(-1)^2}$ **cad** $r_2 = 1$,

• l'argument de $\frac{1 - i}{1 + i}$ est $\theta_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(car θ_2 est tel que: $\cos\theta_2 = 0$ et $\sin\theta_2 = -1$)

- Dans ces conditions, nous devons déterminer r_1 et θ_1:

$$z^2 = \frac{1 - i}{1 + i} \iff \left[r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\right]^2 = 1 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow r_1^2\,[\cos(2\theta_1) + i\sin(2\theta_1)] = 1 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1^2 = 1 \\ 2\theta_1 = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ \theta_1 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En définitive les deux solutions de l'équation sont :

- $z' = 1 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (on prend $k = 0$)
- $z'' = 1 \times \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ (on prend $k = 1$).