Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

1

CORRECTION

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 + z - 4i = 0$.

Soit l'équation: $z^2 + z - 4i = 0$ $\quad (az^2 + bz + c = 0)$.

Calculons: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ici: $a = 1$, $b = 1$ et $c = -4i$.

D'où: $\Delta = 1 + 16i$.

Nous devons donc trouver un nombre complexe $\alpha = a + ib$ tel que: $\alpha^2 = \Delta$.

Nous avons:
- $\alpha^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + i\,(2ab)$,
- $\Delta = 1 + 16i$.

- D'où: $\alpha^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 16 \end{cases}$.

- De plus, comme $\alpha^2 = \Delta$: $|\alpha|^2 = |\Delta|$ cad $a^2 + b^2 = \sqrt{257}$.

Par conséquent, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{257} \\ 2ab = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{257} \\ ab = 8 \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{257} \quad (I). \\ ab > 0 \quad \mathbf{(i)} \end{cases}$$

Du système (I), nous déduisons: $2a^2 = 1 + \sqrt{257}$ cad $a^2 = \dfrac{1+\sqrt{257}}{2}$

cad $a' = \left(\dfrac{1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2}$ ou $a'' = -\left(\dfrac{1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2}$.

Dans ces conditions: $b^2 = a^2 - 1 \iff b^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{257}}{2}\right) - 1$

cad $b' = \left(\dfrac{-1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2}$ ou $b'' = -\left(\dfrac{-1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2}$.

Notons que l'inégalité **(i)** nous permet d'affirmer que a et b sont de même signe.

Ainsi:

- $\alpha' = \left(\dfrac{1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2} + i \times \left(\dfrac{-1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2}$

- $\alpha'' = -\left(\dfrac{1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2} - i \times \left(\dfrac{-1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2}$.

Prenons α' (nous aurions pu prendre aussi α'').

Nous avons donc:

- $z_1 = \dfrac{-b - \alpha'}{2a}$

- $z_2 = \dfrac{-b + \alpha'}{2a}$.

En conclusion, les deux solutions sont:

- $z_1 = \dfrac{-1-\alpha'}{2}$ cad • $z_1 = \dfrac{1}{2}\left[-1-\left(\dfrac{1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2} - i \times \left(\dfrac{-1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2}\right]$

- $z_2 = \dfrac{-1+\alpha'}{2}$ • $z_2 = \dfrac{1}{2}\left[-1+\left(\dfrac{1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2} + i \times \left(\dfrac{-1+\sqrt{257}}{2}\right)^{1/2}\right]$