Maths Expertes
Terminale

Matrices & Suites

MINI COURS

A. Opérations sur les matrices :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, deux matrices de même dimension.

1. L'addition :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. La soustraction :

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Le produit d'une matrice par un réel k :

$$k . A = \begin{pmatrix} k \cdot 1 & k \cdot 2 \\ k \cdot 3 & k \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 3k & 4k \end{pmatrix}.$$

4. La multiplication:

a. Remarques :

- La multiplication entre 2 matrices est possible ssi le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice:

$$A_{(n,p)} \times B_{(p,z)} = C_{(n,z)}.$$

- $A \times B \neq B \times A$.

b. Exemples :

• $A_{(2,2)} \text{ x } B_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \text{ x } 5 + 2 \text{ x } 7 & 1 \text{ x } 6 + 2 \text{ x } 8 \\ 3 \text{ x } 5 + 4 \text{ x } 7 & 3 \text{ x } 6 + 4 \text{ x } 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

• Soient C et D deux matrices carrées d'ordre 3 :

• $C_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

• $D_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}.$

• $C_{(3,3)} \text{ x } D_{(3,3)} =$

$$\begin{pmatrix} 1 \text{ x } 10 + 2 \text{ x } 13 + 3 \text{ x } 16 & 1 \text{ x } 11 + 2 \text{ x } 14 + 3 \text{ x } 17 & 1 \text{ x } 12 + 2 \text{ x } 15 + 3 \text{ x } 18 \\ 4 \text{ x } 10 + 5 \text{ x } 13 + 6 \text{ x } 16 & 4 \text{ x } 11 + 5 \text{ x } 14 + 6 \text{ x } 17 & 4 \text{ x } 12 + 5 \text{ x } 15 + 6 \text{ x } 18 \\ 7 \text{ x } 10 + 8 \text{ x } 13 + 9 \text{ x } 16 & 7 \text{ x } 11 + 8 \text{ x } 14 + 9 \text{ x } 17 & 7 \text{ x } 12 + 8 \text{ x } 15 + 9 \text{ x } 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 \\ 201 & 216 & 231 \\ 318 & 342 & 366 \end{pmatrix}.$$

B. Matrice inverse d'une matrice carrée :

1. Définition :

Une matrice carrée A d'ordre n est inversible s'il existe une matrice B

telle que : $AB = I$ et $BA = I$.

(I = matrice identité)

2. Notation :

La matrice B s'appelle matrice inverse de A et se note : A^{-1}.

3. Propriété :

Soit le système linéaire (S) de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit : • $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$,

- $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ . \\ . \\ . \\ C_n \end{pmatrix}$.

Si A est inversible, les solutions du système s'obtiennent en calculant les éléments de X : $AX = C \iff X = A^{-1}C$.

C. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

1. Formule :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

2. Condition d'inversibilité de A :

A est inversible ssi : $\det A \neq 0$.

3. A^{-1} ?

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

D. Diagonalisation :

1. Définition :

Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$.

2. Conséquence :

Pour tout entier naturel n : $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

E. Suites de matrices :

1. $U_{n+1} = A\,U_n$:

Soient A une matrice carrée d'ordre k et (U_n) la suite de matrices colonnes de taille k x 1, pour tout entier naturel n :

- $U_{n+1} = A\,U_n$, avec $U_0 = \dots$
- $U_n = A^n\,U_0$.

2. $U_{n+1} = A\,U_n + B$:

Soient A une matrice carrée d'ordre k et (U_n) la suite de matrices colonnes de taille k x 1, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = A\,U_n + B$, avec $U_0 = \dots$

Soit : • $C = -\,(A - I_k)^{-1}B$.

• $V_n = U_n - C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors la suite (V_n) est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

• $\begin{cases} V_0 = U_0 - C \\ V_{n+1} = A V_n \end{cases}$

• $V_n = A^n V_0$

• $U_n = A^n (U_0 - C) + C.$

3. L'état stable de la suite (U_n) :

Si (U_n) converge alors, sa limite U est telle que : $U = A U + B$.

U est appelé état stable de la suite (U_n).