

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Graphes & Matrices



MINI COURS

A. Graphes non-orientés :

1. Définition :

Un graphe non-orienté G est un ensemble de sommets reliés par des arêtes.

2. Vocabulaire :

- **L'ordre d'un graphe** est égal au nombre total de ses sommets.
- Une arête reliant 2 sommets est dite **incidente** à ces 2 sommets.
- Une arête est une **boucle** si elle relie un sommet à lui-même.
- 2 sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.
- Le **degré d'un sommet** est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité, les boucles comptant pour deux.
- Un **graphe** est dit **simple** si au plus une arête relie 2 sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.
- Un **graphe non-orienté** est **complet** si tous ses sommets sont adjacents.

3. Chaîne :

- On appelle **chaîne** une suite de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont adjacents.
- La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui composent la chaîne.

- **Une chaîne fermée** est une chaîne dont le premier et le dernier sommet sont confondus.
- **Un cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.
- **Un graphe** est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre 2 sommets quelconques de ce graphe.
- **La distance entre 2 sommets** est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.
- **Le diamètre d'un graphe** est la plus grande distance entre 2 sommets.

4. Chaîne eulérienne :

Une chaîne eulérienne est une chaîne telle que:

- **elle contient toutes les arêtes du graphe,**
- **chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.**

5. Cycle eulérien :

Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne fermée.

6. Théorème d'Euler :

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- **2 sommets (et 2 seulement) X et Y de G sont de degré impair**
- **G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.**

B. Graphes orientés :

1. Définition :

- Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées.
- Chaque arête ne peut-être parcourue que dans le sens de la flèche.
- Une boucle est une arête orientée ayant pour origine son extrémité.

2. Matrice d'adjacence d'un graphe :

Il s'agit de la matrice associée à un graphe (orienté ou non) d'ordre n où le terme de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j .

C. Chaînes de Markov :

1. Définition :

Une chaîne de Markov sur un espace d'états E est un processus (X_n) tel que:

- pour tout état i de E , l'évènement $\{ X_{n+1} = i \}$ ne dépend que de l'état dans lequel était le processus à l'instant n
- la probabilité de passer de l'état i à l'état j ne dépend pas de l'instant n .

2. Matrice de transition et graphe associé :

A une chaîne de Markov, on associe:

- **un graphe probabiliste orienté pondéré tel que la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet donné vaut 1**
- **une matrice carrée M , dite matrice de transition associée, où le coefficient situé en ligne i et colonne j est égal à la probabilité de passer de l'état i à l'état j .**

D. Distributions :

1. Les coefficients de M^n :

Pour tous états i et j et pour tout entier naturel $n \geq 1$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice M^n est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transition.

2. Distribution après n transitions :

Soient :

- P_0 , la distribution initiale
- P_n , la distribution après n transitions
- M , la matrice de transition.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

- $P_n = P_0 \times M^n$
- $P_{n+1} = P_n \times M.$

E. Distributions invariantes ou " état stable " :

1. Notion de distribution invariante :

Soit M la matrice de transition.

P (ou π) est une distribution invariante ssi:

$$P = P \times M \quad (\text{ou } \pi = \pi \times M).$$

2. Propriété :

Soient :

- P_0 , la distribution initiale

- M , la matrice de transition.

S'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que la matrice M^k ne comporte pas de 0, alors la suite (P_n) (ou (π_n)) des distributions converge vers une distribution P (ou π) invariante et indépendante de P_0 (ou π_0).

P (ou π) est l'unique distribution invariante de cette chaîne de Markov.

On parle " d'état stable ".