Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THE GAME

CORRECTION

Partie A:

Déterminons le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre pour aller du point O au point F:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet pour aller de O à F, tout en combattant le plus faible nombre de créatures:

le trajet O - A - B - E - D - F.

Et ce trajet comportera: $2 + 2 + 3 + 1 + 6 = 14$ créatures à combattre.

Au total, le trajet qu'Alex doit suivre pour aller de O à F, tout en combattant le plus petit nombre de créatures est:

O - A - B - E - D - F, et Alex rencontrera 14 créatures.

Partie B:

1. Traduisons l'énoncé par un système de 3 équations à 3 inconnues:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, pour $x \in [1; 10]$,
- quand $x = 1$, $y = 8$,
- quand $x = 2$, $y = 25$,
- quand $x = 3$, $y = 80$.

Ainsi, nous avons le système suivant:

$$\begin{cases} x=1,\ y=8 \\ x=2,\ y=25 \\ x=3,\ y=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ 4a+2b+c=25. \\ 9a+3b+c=80 \end{cases} \quad (I)$$

2. Vérifions que le système (I) peut s'écrire sous la forme $AX=B$:

$$(I) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\iff AX=B, \text{ avec: } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Au total, nous avons bien: $(I) \iff AX=B$.

3. a. Calculons $M \times A$:

$$M \times A = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au total: $M \times A = I_3$, I_3 étant la matrice identité d'ordre 3.

3. b. Que représente la matrice M pour la matrice A ?

Comme $M \times A = I_3$, M représente la matrice inverse de A.

Et nous pouvons noter: $M = A^{-1}$ et $A^{-1} \times A = I_3$.

4. Déterminons les nombres a, b et c:

Nous savons que: $AX = B$.

D'où nous pouvons écrire: $AX = B \iff A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$

$\iff (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B$

$\iff I_3 \times X = A^{-1} \times B$

$\implies X = M \times B$.

Au total: $X = M \times B \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$

$\implies \begin{cases} a = 19 \\ b = -40 \\ c = 29 \end{cases}$.

5. Le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours, si la capacité d'accueil est de 2 500 personnes ?

Pour répondre à cette question, nous allons dresser le tableau suivant:

x	4	5	6	7	8	9	10
y	173	304	473	680	925	1208	1529

, avec: $y = 19x^2 - 40x + 29$.

Comme les différentes valeurs de y obtenues sont toutes inférieures à 2 500 personnes, il n'y a aucun risque pour que le parc refuse d'accueillir des personnes un de ces dix jours.