Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE LIQUIDE INDUSTRIEL

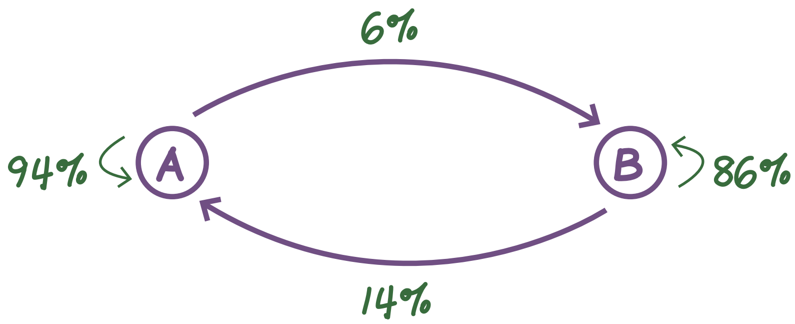
CORRECTION

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste:

Soient: • A, l'état: " les clients se fournissent chez A ",

• B, l'état: " les clients se fournissent chez B ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. a. Donnons la matrice de transition T de ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition est:

$$T = \begin{pmatrix} 94\% & 6\% \\ 14\% & 86\% \end{pmatrix}.$$

2. b. Déterminons la répartition prévisible des ventes entre ces deux grossistes en 2020:

Ici, nous devons calculer: $P_3 = (a_3 \quad b_3)$.

En effet: $2020 = 2017 + 3$.

D'après le cours: $P_3 = P_0 \times T^{(3-0)}$ **cad** $P_3 = P_0 \times T^3$.

Or: $P_0 = (45\% \quad 55\%)$.

Et: • $T^2 = \begin{pmatrix} 89,2\% & 10,8\% \\ 25,2\% & 74,8\% \end{pmatrix}$,

• $T^3 = \begin{pmatrix} 85,36\% & 14,64\% \\ 34,16\% & 65,84\% \end{pmatrix}$.

D'où: $P_3 = (45\% \quad 55\%) \begin{pmatrix} 85,36\% & 14,64\% \\ 34,16\% & 65,84\% \end{pmatrix}$

$= (57,2\% \quad 42,8\%)$.

Ainsi: $a_3 = 57,2\%$ et $b_3 = 42,8\%$.

Au total, en 2020 la répartition prévisible des ventes sera:

- 57, 2% des clients iront se fournir chez A,
- 42, 8% des clients iront se fournir chez B.

3. a. Montrons que la suite (U_n) est géométrique et déterminons son premier terme et sa raison:

$U_n = a_n - 0,7 \iff U_{n+1} = a_{n+1} - 0,7$

$\iff U_{n+1} = (0,8a_n + 0,14) - 0,7 \quad (1)$.

Or: $U_0 = a_0 - 0,7 \Rightarrow U_0 = 0,45 - 0,7 = -0,25$ et $a_n = U_n + 0,7$.

Ainsi: (1) $\iff$ $U_{n+1} = (0,8\,[\,U_n + 0,7\,] + 0,14) - 0,7$

$\iff$ $U_{n+1} = 0,8\,U_n$.

Par conséquent, (U_n) est une suite géométrique de raison **$q = 0,8$** et de premier terme **$U_0 = -\,0,25$**.

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $a_n = -\,0,25 \times 0,8^n + 0,7$:

Comme $U_{n+1} = 0,8\,U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = U_0 \times (0,8)^n \iff U_n = -\,0,25 \times 0,8^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De plus: $a_n = U_n + 0,7$.

D'où: **$a_n = -\,0,25 \times 0,8^n + 0,7$.**

Au total, pour tout entier naturel n: $a_n = -\,0,25 \times 0,8^n + 0,7$.

3. c. Déterminons la part de marché que A peut espérer à long terme:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} -\,0,25 \times 0,8^n + 0,7$$

$$= 0,7 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} -\,0,25 \times 0,8^n = 0, \quad \text{car: } 0,8 \in \,]\,0\,;\,1\,[.$$

Ainsi à long terme, il y a 70% de chance pour que le client se fournisse chez le grossiste A.

Donc A aura 70% de part de market, à long terme.

3. d. Déterminons l'année à partir de laquelle A détiendra plus de 65% du marché:

Pour répondre à cette question, nous devons déterminer n tel que: $a_n \geqslant 65\%$.

$a_n \geqslant 65\%$ <=> $-0,25 \times 0,8^n + 0,7 \geqslant 0,65$

<=> $n \times \ln(0,8) \leqslant \ln(0,2)$

<=> $n \geqslant 8$ car n est un entier naturel.

Ainsi, 8 ans après l'année 2017, A détiendra plus de 65% du marché.

Soit en: 2025 (2017 + 8).