# Maths Expertes
## Terminale

## Graphes, Matrices, Suites

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# LE FOOTING QUOTIDIEN

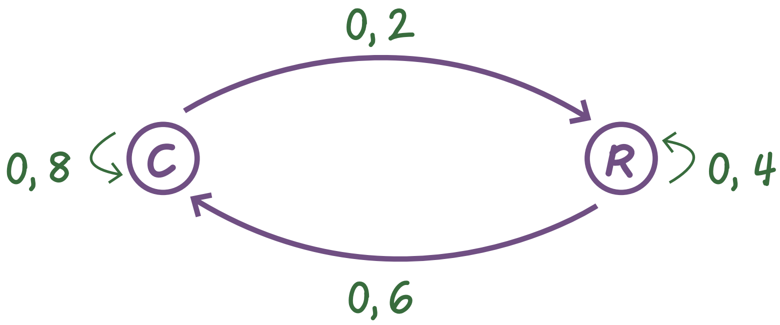
## CORRECTION

1. **Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R:**

Soient: • C, l'état: " Hugo court ",

• R, l'état: " Hugo ne court pas ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:






2. **Ecrivons la matrice de transition M de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets:**

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

3. a. **Déterminons le calcul matriciel qui permet de déterminer la probabilité $c_6$ qu'Hugo coure le 7e jour:**

Soient: M la matrice de transition du graphe probabiliste à 2 sommets (C et R), $P_0$ la matrice ligne décrivant l'état initial et $P_6$ l'état probabiliste à l'état $n = 6$.

Nous avons: $P_6 = P_0 \times M^6$, avec $P_0 = (c_0 \quad r_0) = (1 \quad 0)$.

Dans ces conditions: $P_6 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}$

cad: $P_6 = (0,750016 \quad 0,249984)$.

Au total, le calcul matriciel qui permet de déterminer la probabilité $c_6$ est:

$$P_6 = (1 \quad 0) \times M^6.$$

**3. b. Déterminons une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $c_6$:**

Nous savons que: $P_6 = (0,750016 \quad 0,249984)$.

Ainsi, à $10^{-2}$ près: $c_6 \approx 0,75$.

**4. a. Exprimons $P_{n+1}$ en fonction de $P_n$:**

D'après le cours: pour tout n de IN, $P_{n+1} = P_n \times M$.

Au total, $P_{n+1}$ en fonction de $P_n$ s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

**4. b. Montrons que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$:**

Nous savons que: $P_{n+1} = P_n \times M$.

D'où: $(c_{n+1} \quad r_{n+1}) = (c_n \quad r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

<=> $(c_{n+1} \quad r_{n+1}) = (0,8c_n + 0,6r_n \quad 0,2c_n + 0,4r_n)$

=> $c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n$. (a)

Or, d'après le cours: $c_n + r_n = 1$, pour tout entier naturel n.

Dans ces conditions: (a) <=> $c_{n+1} = 0,8\ c_n + 0,6\ (1 - c_n)$, car $r_n = 1 - c_n$

=> $c_{n+1} = 0,2\, c_n + 0,6$.

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons: $c_{n+1} = 0,2\, c_n + 0,6$.

**5. a. Montrons que la suite $(V_n)$ est géométrique et déterminons $V_0$ et $q$:**

$V_n = c_n - 0,75$ <=> $V_{n+1} = c_{n+1} - 0,75$

<=> $V_{n+1} = (0,2\, c_n + 0,6) - 0,75$ (1).

Or: $V_0 = c_0 - 0,75$ => $V_0 = 0,25$ et $c_n = V_n + 0,75$.

Ainsi: (1) <=> $V_{n+1} = (0,2\, [V_n + 0,75] + 0,6) - 0,75$

=> $V_{n+1} = 0,2\ V_n$.

Par conséquent, $(V_n)$ est bien une suite géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme $V_0 = 0,25$.

**5. b. b1. Exprimons $V_n$ en fonction de $n$:**

Comme $V_{n+1} = 0,2\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,2)^n$, avec: $V_0 = 0,25$.

En d'autres termes: $V_n = 0,25 \times (0,2)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**5. b. b2. Déterminons la limite de la suite $(V_n)$:**

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,25 \times (0,2)^n$

$= 0$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^n = 0$, car: $0,2 \in \,]0, 1[$.

Donc la suite $(V_n)$ est convergente et converge vers " 0 ".

**5. c. Justifions que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$:**

Nous savons que: $*$ $V_n = 0,25 \times (0,2)^n$

$*$ $c_n = V_n + 0,75$.

D'où: $c_n = 0,25 \times (0,2)^n + 0,75$ ou $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$.

**5. d. Que pouvons-nous conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29/12/14 ?**

Nous savons que: • $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ et • $c_n = V_n + 0,75$.

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} V_n + 0,75$

$= 0 + 0,75$

$= 0,75$.

Donc la suite $(c_n)$ est convergente et converge vers " 0, 75 ".

Comme ici " n " est très grand ($n > 360$), la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 est d'environ 0, 75 cad 75%.

**5. e. Conjecturons alors l'état stable de ce graphe:**

Soit $P = (0,75 \quad 1 - 0,75) = (0,75 \quad 0,25)$.

L'état de $P_n$ à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial $P_0$.

P correspond à l'état stable de ce graphe.

De plus, d'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.

Ici: $P \times M = (0,75 \quad 0,25)\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

<=> $P \times M = (0,75 \quad 0,25)$

=> $P \times M = P$.

Au total, nous venons de vérifier que l'état stable de ce graphe est bien:

$$P = (0,75 \quad 0,25).$$