

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Graphes, Matrices, Suites



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# LA CARTE JEUNE

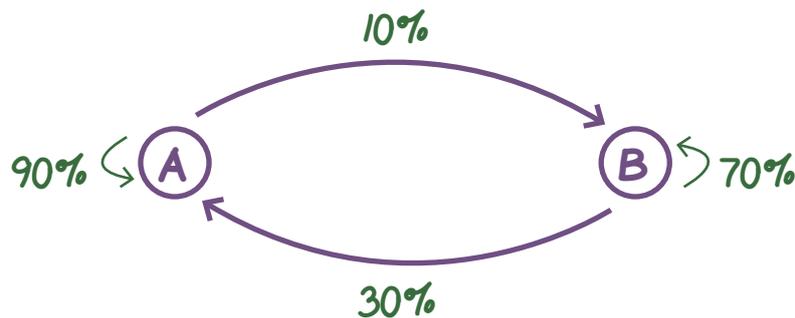
## CORRECTION

### Partie A:

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste:

- Soient:
- A, l'état: " posséder une carte jeune ",
  - B, l'état: " ne pas posséder une carte jeune ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Donnons la matrice de transition M de ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix}.$$

3. a. Vérifions que  $a_2 = 0,552$  et  $b_2 = 0,448$ :

Pour cela, nous devons calculer:  $P_2 = (a_2 \quad b_2)$ .

D'après le cours:  $P_2 = P_0 \times M^{(2-0)}$  **cad**  $P_2 = P_0 \times M^2$ .

Or:  $P_0 = (20\% \quad 80\%)$  (en 2018, 80% ne possédaient pas la carte).

$$\text{Et: } M^2 = \begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84\% & 16\% \\ 48\% & 52\% \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P_2 &= (20\% \quad 80\%) \begin{pmatrix} 84\% & 16\% \\ 48\% & 52\% \end{pmatrix} \\ &= (55,2\% \quad 44,8\%). \end{aligned}$$

**Ainsi:**  $a_2 = 55,2\%$  et  $b_2 = 44,8\%$ .

**Au total, nous avons bien:**  $a_2 = 55,2\% = 0,552$  et  $b_2 = 44,8\% = 0,448$ .

3. b. Interprétons le coefficient 0,552 dans le contexte de l'énoncé:

'0,552' signifie qu'en 2020 (2018 + 2), 55,2% de la population des 12-18 ans de la ville posséderont (estimation) la carte jeune.

4. a. Déterminons le système vérifié par les coefficients a et b:

Pour cela, nous allons déterminer l'état stable du système.

A long terme, l'état  $P_n$  à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial.

Nous allons donc déterminer  $P = (a \quad b)$ .

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation:  $P = P \times M$ .

$$\text{Soit } P = (a \quad b), P = P \times M \Leftrightarrow (a \quad b) = (a \quad b) \begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,3b \\ b = 0,1a + 0,7b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ 0,1a - 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Au total, les nombres  $a$  et  $b$  sont bien solutions du système:  $\begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

4. b. Justifions que la mairie peut espérer qu'à l'avenir au moins 70% de la population des 12-18 ans possèdent la carte:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer la valeur de " $a$ " en

résolvant le système:  $\begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,1a + 0,3(1-a) = 0 \\ b = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,75 \\ b = 0,25 \end{cases}$$

De plus, nous savons que l'état stable  $P$  nous indique, au bout de  $n$  années (" $n$  très grand"), le pourcentage de la population des 12-18 ans qui posséderont la carte jeune, ainsi que celui de la population des 12-18 ans qui ne posséderont pas la carte jeune.

Comme ici:  $P = (75\% \quad 25\%)$ , nous pouvons affirmer qu'à long terme, 75% de la population des 12-18 ans posséderont la carte jeune.

Donc: oui, le maire peut espérer qu'à l'avenir au moins 70% de la population des 12-18 ans possèdent la carte jeune car  $75\% > 70\%$ .

## Partie B:

### 1. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

$A \leftarrow 0,2$

$N \leftarrow 0$

Tant que  $A < 0,7$  faire

|  $A$  prend la valeur  $0,6 \times A + 0,3$

|  $N$  prend la valeur  $N + 1$

Fin Tant que

### 2. Déterminons l'année où l'objectif sera atteint:

D'après l'énoncé,  $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3$  et la suite  $(a_n)$  est croissante, pour tout entier naturel  $n$ .

A l'aide d'une machine à calculer, nous avons: •  $a_4 \approx 0,6787 < 0,7$

•  $a_5 \approx 0,7072 > 0,7$ .

Ainsi: l'objectif sera atteint en 2023 ( $2018 + 5$ ).