www.freemaths.fr

Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

JOUER EN LIGNE

CORRECTION

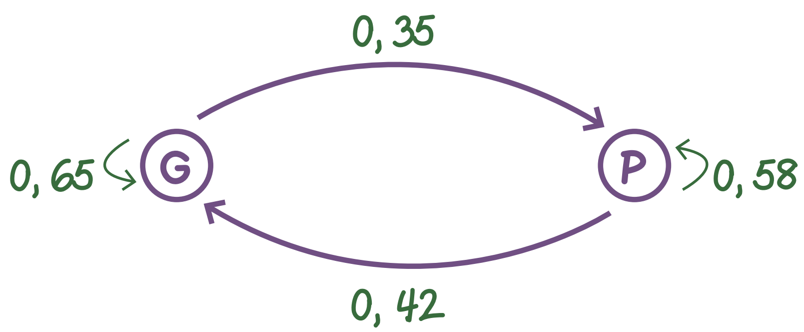
Partie A :

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste :

Soient : • G, l'état : " Franck gagne la partie ",

• P, l'état : " Franck perd la partie ".

Le graphe probabiliste est le suivant :



2. a. Écrivons la matrice de transition M dans l'ordre G-P :

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}.$$

2. b. Calculons la probabilité que Franck gagne la troisième partie :

Il s'agit ici de calculer g_3.

Pour cela nous devons calculer : $P_3 = (g_3 \quad p_3)$.

D'après le cours: $P_3 = P_1 \times M^{(3-1)}$ **cad** $P_3 = P_1 \times M^2$.

Or: $P_1 = (1 \quad 0)$, **car**: **Franck a gagné la première partie**.

D'où: $P_3 = (1 \quad 0) \times M^2$

$$= (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}^2$$

$$= (56,95\% \quad 43,05\%).$$

Donc: $g_3 = 56,95\%$ et $p_3 = 43,05\%$.

Au total, la probabilité que Franck gagne la troisième partie est de:

56, 95%.

3. Déterminons l'état stable du système et interprétons:

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_1.

Nous allons donc déterminer $P = (g \quad p)$.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (g \quad p)$, $P = P \times M \iff (g \quad p) = (g \quad p)\begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}$

$$\iff (g \quad p) = (0,65\,g + 0,42\,p \quad 0,35\,g + 0,58\,p)$$

$$\iff \begin{cases} 0,65\,g + 0,42\,p = g \\ 0,35\,g + 0,58\,p = p \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -0,35g + 0,42p = 0 \\ g + p = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} g = \dfrac{6}{11} \\ p = \dfrac{5}{11} \end{cases}$$, et donc: $P = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{11} & \dfrac{5}{11} \end{pmatrix}$.

Au total, l'état stable du système est: $P = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{11} & \dfrac{5}{11} \end{pmatrix}$.

Cela signifie qu'après n parties (" n très grand "), la probabilité de gagner pour Franck sera de $\dfrac{6}{11}$ et celle de perdre de $\dfrac{5}{11}$.

Partie B:

1. a. Justifions qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois:

Cela revient à déterminer si le graphe admet **une chaîne eulérienne**.

D'après le cours:

Le graphe étant connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y du graphe sont de degré impair.
- Le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Or ici: le graphe (d'ordre 7) est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

Et, nous avons le tableau des sommets degrés suivant:

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	4	4	4	4	2

(degré d'un sommet = nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité)

Comme il n'y a aucun sommet de degré impair, d'après le **théorème d'Euler**,

le graphe admet une chaîne eulérienne.

Donc: **oui**, il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

1. b. Donnons un tel chemin:

Un exemple pour aller de A à A est:

A – B – F – G – E – F – D – E – C – D – B – C – A.

2. Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?

Comme dit à la question précédente: oui, il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

Ceci est dû au fait que le graphe admet une chaîne eulérienne.

Par conséquent: **oui**, il existe un chemin permettant à Franck de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs.

Notons qu'une chaîne eulérienne est une chaîne telle que:

- elle contient toutes les arêtes du graphe,
- chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.

3. **Déterminons le trajet minimal et précisons le nombre de monstres affrontés**:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet minimal (" **affronter le moins de monstres possibles** ") que doit suivre Franck pour aller de la salle G à la salle A: le trajet G – F – D – C – A.

Et durant ce trajet minimal, Franck affrontera: $5 + 3 + 5 + 12 = 25$ monstres.

Au total, le trajet minimal que Franck doit suivre pour aller de G à A, tout en affrontant le moins de monstres possible est:

G – F – D – C – A, et il affrontera **25 monstres**!