

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

PGCD, Bézout & Gauss



MINI COURS

A. PGCD = Plus Grand Commun Diviseur :

1. Définition :

Soit a et b deux nombres entiers relatifs non tous nuls.

Le plus grand commun diviseur à " a " et " b " correspond au plus grand élément " d " de l'ensemble des diviseurs communs à " a " et " b ".

2. Notation :

$$\text{PGCD} (a ; b) = \text{PGCD} (b ; a) = d.$$

B. Propriétés 1 :

- $\text{PGCD} (a ; b) = \text{PGCD} (b ; a)$
- $\text{PGCD} (|a| ; |b|) = \text{PGCD} (a ; b)$
- $\text{PGCD} (a ; 0) = a$ (car 0 est multiple de tout entier)
- Si b divise a , alors: $\text{PGCD} (a ; b) = |b|$.

C. Propriétés 2 :

Soient " a ", " b " et " k " des nombres entiers naturels non nuls.

- $\text{PGCD} (k \cdot a ; k \cdot b) = k \cdot \text{PGCD} (a ; b)$
- $\text{PGCD} (a ; b) = k \cdot \text{PGCD} \left(\frac{a}{k} ; \frac{b}{k} \right)$.

D. Lemme d'Euclide :

Soient " a ", " b ", " q " et " r " des nombres entiers relatifs non nuls.

Si $a = b \cdot q + r$, alors: $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$.

E. Nombres premiers entre eux :

1. Définition :

Deux nombres entiers relatifs non nuls " a " et " b " sont premiers entre eux ssi: **$\text{PGCD}(a; b) = 1$.**

2. Propriété :

Soit " a " et " b " deux nombres entiers relatifs non nuls, avec:

$$d = \text{PGCD}(a; b).$$

Alors: **$a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.**

F. Le théorème de Bézout :

Soit " a " et " b " deux nombres entiers relatifs non nuls.

1. Identité de Bézout :

Si $d = \text{PGCD}(a; b)$, alors il existe des entiers relatifs u et v tels que:

$$a \cdot u + b \cdot v = d.$$

2. Théorème de Bézout :

" a " et " b " sont premiers entre eux ssi il existe des entiers relatifs u et v tels que: $a \cdot u + b \cdot v = 1$.

3. Corollaire du théorème de Bézout :

L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières ssi: **c** est un multiple du PGCD (a ; b).

G. Théorème de Gauss :

Soit " a ", " b " et " c " trois entiers relatifs non nuls.

1. Théorème de Gauss :

Si a divise le produit bc et, si a et b sont premiers entre eux, alors:

a divise c.

2. Corollaire du théorème de Gauss :

Si b et c divise a et si b et c sont premiers entre eux, alors: **bc divise a.**

H. Équations diophantiennes :

1. Définition :

Une équation diophantienne du premier degré est une équation qui peut se mettre sous la forme: $ax + by = c$.

2. D'après le corollaire de Bézout :

Une telle équation admet des solutions si **c est un multiple de PGCD (a ; b)**.

3. D'après le théorème de Gauss :

Une solution particulière permet alors de trouver toutes les solutions de cette équation.