Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

MINI COURS

A. Nombres premiers dans $\mathbb{N}$:

1. Définition :

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs: 1 et lui-même.

2. Remarques :

- **0 n'est pas un nombre premier car il admet une infinité de diviseurs dans $\mathbb{N}$.**
- **1 n'est pas premier car il a un seul diviseur dans $\mathbb{N}$: lui-même.**
- **2 est le plus petit nombre premier.**
- **2 est le seul nombre premier pair.**
- **Un entier naturel non premier est appelé: nombre composé.**

3. Propriétés 1 :

- **Tout entier naturel $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.**
- **Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier P avec:**

$$2 < P \leqslant \sqrt{n}.$$

4. Propriétés 2 :

Il existe une infinité de nombres premiers.

B. Décomposition en produit de facteurs premiers :

1. Existence et unicité d'une décomposition :

- Tout entier naturel $n \geqslant 2$ est premier ou produit de nombres premiers.

- La décomposition en produit de facteurs premiers de tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 est unique.

2. Diviseurs d'un nombre entier naturel non premier :

Tout entier $n \geqslant 2$ peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.

Soit m nombres premiers distincts $P_1, P_2, \ldots, P_m$ et m entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ alors:

$$n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_m^{\alpha_m} .$$

Par exemple : $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11$.

C. Petit théorème de Fermat :

1. Énoncé du théorème :

Soit un nombre premier P et un entier naturel a non multiple de P, alors:

$$a^{P-1} \equiv 1 \; [\, P \,].$$

2. Propriété :

Si P est un nombre premier, alors pour tout nombre entier a:

$$a^P \equiv a \; [\, P \,].$$

Par exemple : **7 n'est pas divisible par 5.**

Donc, d'après le petit théorème de Fermat : $7^4 \equiv 1 \; [\, 5 \,]$.