Maths Expertes
Terminale

La congruence

MINI COURS

A. Congruence dans $\mathbb{Z}$:

1. Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

On dit que " a " est congru à " b " modulo " n " quand:

" a - b " est un multiple de " n ".

2. Notations :

- $a \equiv b \, [\, n \,]$
- $a \equiv b \, (\bmod n)$.

3. Exemples :

- $15 \equiv 7 \, [\, 2 \,]$
- $21 \equiv 0 \, [\, 7 \,]$
- $-5 \equiv -1 \, [\, 4 \,]$ $\quad$ ($-5 - (-1) = -1 \times 4$).

B. Propriétés 1 :

Soient a, b et c trois entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

- $a \equiv 0 \, [\, n \,]$ ssi: a est divisible par n
- $a \equiv a \, [\, n \,]$
- r est le reste de la division euclidienne de a par n ssi:

$a \equiv r\ [n]$ et $0 \leqslant r < n$

• si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors: $a \equiv c\ [n]$.

C. Propriétés 2 :

Soient a, b, c et d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

• si $a \equiv b\ [n]$, alors: $a + c \equiv b + c\ [n]$

• si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors: $a + c \equiv b + d\ [n]$

• si $a \equiv b\ [n]$, alors: $ac \equiv bc\ [n]$

• si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors: $ac \equiv bd\ [n]$

• si $a \equiv b\ [n]$, alors: $a^p \equiv b^p\ [n]$ $(p \in \mathbb{N}^*)$.