BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

POLYNÉSIE

2023

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES V F F F V

1. La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire: $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

$$\iff \frac{-1}{n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\iff \frac{-1}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or pour tout entier naturel n: • $-1 \leqslant \frac{-1}{n+1}$

• $\frac{1}{n+1} \leqslant 1.$

Donc $-1 \leqslant U_n \leqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent: la suite (U_n) est bornée.

2. Toute suite bornée est convergente ?

Pour répondre à cette question, il suffit de prendre comme contre-exemple la suite (U_n) définie par: $U_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire: $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Ainsi, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant U_n \leqslant 1$: **la suite (U_n) est bornée.**

Or elle admet 2 limites différentes selon la parité de " n ": -1 et 1.

Ici la suite (U_n) est donc bornée mais pas convergente.

3. Toute suite croissante tend vers $+\infty$?

Pour répondre à cette question, il suffit de prendre comme contre-exemple la suite (U_n) définie par: $U_n = -\dfrac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette suite (U_n) est strictement croissante.

En effet: $\dfrac{-1}{n+1} > -\dfrac{1}{n}$ et donc $U_{n+1} > U_n$.

- Et: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$.

Ici la suite (U_n) est donc croissante, et pourtant, elle tends vers 0.

4. Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ et f est convexe sur $[-3\,;\,1]$?

Ici:
- $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$
- $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

Pour répondre à cette question, nous allons calculer f' et f'' sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

- $f''(x) = \dfrac{(2) \times (x^2+2x+2) - (2x+2) \times (2x+2)}{[x^2+2x+2]^2}$

$= \dfrac{-(2x^2+4x)}{[x^2+2x+2]}$.

Notons que le signe de f'' dépend du signe de $-(2x^2+4x)$.

Dressons le tableau de signe pour l'étude du signe de la fonction:

$$-(2x^2+4x) = -2x(x+2).$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-2x$		+		+	0	-	
$x+2$		-	0	+		+	
$-2x(x+2)$		-	0	+	0	-	

Or, d'après le cours:

- f est concave sur I ssi $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
- f est convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Donc ici sur $[-3; 1]$: la fonction f n'est ni concave, ni convexe.

5. L'exécution de mystere ([2, 3, 7, 0, 6, 3, 2, 0, 5]) renvoie 7 ?

L'exécution donne: la valeur maximale des termes de la suite cad " 7 ".