BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

MAYOTTE, RÉUNION
2023

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES

PARTIE A A B D

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} n + 1$ et $U_0 = 3$.

1. $U_2 = \dots$

$U_2 = \frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{2} \times (1) + 1$, avec : $U_1 = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times (0) + 1$.

D'où : $U_2 = \frac{11}{4}$ car $U_1 = \frac{5}{2}$.

Ainsi : $U_2 = \frac{11}{4}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - n$ et $\dots$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - n$.

D'où : $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1)$

$= \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} n + 1 - n - 1$

$$= \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{2} n$$

$$= \frac{1}{2} \times [U_n - n]$$

$$= \frac{1}{2} V_n.$$

D'où (V_n) est: une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 0 = 3$.

3. Pour que terme (n) renvoie la valeur de U_n, ...

On peut compléter la ligne 4 par: $U = \frac{U}{2} + \frac{i}{2} + 1$.

PARTIE B

1. **Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant U_n \leqslant n + 3$:**

Ici: • $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 3$

• $U_1 = \frac{5}{2}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $n \leqslant U_n \leqslant n + 3$ ".

Initialisation: $0 \leqslant U_0 \leqslant 0 + 3$?

Comme $0 \leqslant 3 \leqslant 0 + 3$, nous avons bien: $0 \leqslant U_0 \leqslant 3$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un entier naturel n fixé, $n \leqslant U_n \leqslant n + 3$ et montrons qu'alors $(n + 1) \leqslant U_{n+1} \leqslant (n + 1) + 3$.

Supposons: $\underbrace{n \leqslant U_n \leqslant n + 3}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} \times n \leqslant \frac{1}{2} \times U_n \leqslant \frac{1}{2} \times (n + 3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} n \leqslant \frac{1}{2} \times U_n + \frac{1}{2} n \leqslant \frac{1}{2} \times (n + 3) + \frac{1}{2} n$$

$$\Rightarrow n + 1 \leqslant \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} n + 1 \leqslant \frac{1}{2} \times (n + 3) + \frac{1}{2} n + 1$$

$$\Rightarrow n + 1 \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} n + 1$$

$$\Rightarrow (n + 1) \leqslant U_{n+1} \leqslant (n + 1) + \frac{3}{2} \leqslant (n + 1) + 3.$$

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $n \leqslant U_n \leqslant n + 3$.**

2. Déduisons-en la limite de la suite (U_n) en $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} n + 3 = +\infty.$$

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

3. Déterminons la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{n}\right)$ en $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+3}{n} = \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n}\right) + \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: la suite $\left(\frac{U_n}{n}\right)$ converge vers 1.