Maths Complémentaires Terminale

Bernoulli & binomiale

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA MALADIE ET LES FRUITS

CORRECTION

1. a. Calculons la probabilité que le fruit prélevé soit traité et abîmé:

Cela revient à calculer: $P(T \cap A)$.

$P(T \cap A) = P_T(A) \times P(T)$.

Ainsi: $P(T \cap A) = 12\% \times 25\%$ => $P(T \cap A) = 3\%$.

Au total, il y a 3% de chance pour que le fruit prélevé soit traité et abîmé.

1. b. Montrons que $P(A) = 0,255$:

L'événement $A = (A \cap T) \cup (A \cap \overline{T})$.

D'où: $P(A) = P(A \cap T) + P(A \cap \overline{T})$

$= P(T \cap A) + P_{\overline{T}}(A) \times P(\overline{T})$.

Ainsi: $P(A) = 3\% + 30\% \times 75\%$

=> $P(A) = 25,5\%$.

Au total, il y a 25,5% de chance pour que le fruit soit abîmé.

2. Peut-on affirmer que $P_A(T) = 25\%$?

$$P_A(T) = \frac{P(A \cap T)}{P(A)} \Rightarrow P_A(T) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)}.$$

Ainsi: $P_A(T) = \frac{3\%}{25,5\%} \Rightarrow P_A(T) = 12\%.$

Comme $12\% \neq 25\%$, la réponse est: NON.

3. Calculons la probabilité qu'au plus un fruit soit abîmé:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **prélever au hasard un lot de 5 fruits dans le champ**.

Soient les événements **A** = " le fruit est abîmé ", et $\overline{A}$ = " le fruit n'est pas abîmé ".

On désigne par **X** le nombre de fois où l'événement **A** s'est réalisé au cours des 5 épreuves.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 5 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: **A** et $\overline{A}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de **A** suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 5$ et $p = 25,5\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(5; 25,5\%)$.

Ici, nous devons calculer: $P(X \leqslant 1)$, avec $X \rightsquigarrow B(5; 25,5\%)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{5}{0}(25,5\%)^0\,(1 - 25,5\%)^5 + \binom{5}{1}(25,5\%)^1\,(1 - 25,5\%)^4$$

$\Rightarrow$ $P(X \leqslant 1) \approx 0,622$ (calculatrice).

Au total, il y a environ 62,2% de chance pour que: " au plus un fruit soit abîmé, sur 5 fruits prélevés ".

4. a. Calculons E (X):

D'après le cours: $E(X) = n \cdot p$.

Donc ici nous avons: $E(X) = 5 \times 0,255$

$= 1,275$ fruits.

4. b. Déduisons-en V (X):

D'après le cours: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Donc ici nous avons: $V(X) = 5 \times 0,255 \times 0,745$

$\approx 0,949$.