Maths Complémentaires Terminale

Bernoulli & binomiale

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA GRIPPETTE ...

CORRECTION

1. Déterminons la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **interroger au hasard n habitants de la ville**: n tirages successifs indépendants et avec remise.

Soient les événements V = " l'habitant est vacciné ", et $\overline{V}$ = " l'habitant n'est pas vacciné ".

On désigne par **X** la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: V et $\overline{V}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de V suit donc **une loi binomiale** de paramètres: **n** et **p = 40%**.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(n; 40\%)$.

2. a. Déterminons la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées:

Il s'agit de calculer ici: $P(X = 15)$, avec $X \rightsquigarrow B(40\,;\,40\%)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X = 15) = \binom{40}{15}(40\%)^{15}(1 - 40\%)^{25}$

$\Rightarrow$ $P(X = 15) \approx 12{,}3\%$ (calculatrice).

Au total, la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées est d'environ: 12,3%.

2. b. Déterminons la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soient vaccinées:

Il s'agit de calculer ici: $P(X \geqslant 20)$.

$P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19)$

$\Rightarrow$ $P(X \geqslant 20) \approx 13\%$ (calculatrice).

Au total, la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soient vaccinées est d'environ: 13%.

3. Calculons l'écart type de X:

D'après le cours: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Donc ici nous avons: $V(X) = 40 \times 0,4 \times 0,6$

$$= 9,6.$$

Dans ces conditions, l'écart type de X est:

$$\sqrt{V(X)} \approx 3,099 \text{ habitants vaccinés.}$$